BUAP

GUÍA DE ESTUDIO

CIENCIAS EXACTAS



ADMISÓN 2021

ÍNDICE

SESIÓN 4. GEOMETRÍA

SESIÓN 5. TRIGONOMETRÍA

SESIÓN 6. ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

PRESENTACIÓN DEL ÁREA

El objetivo de esta guía es proporcionar un repaso teórico y práctico, con ejercicios que contribuyan en la preparación del alumno para presentar la Prueba de Conocimiento por Área de Ciencias Exactas e Ingenierías.

Los temas que se evalúan están relacionados con áreas de conocimiento de:

- Física
- Álgebra
- Geometría
- Trigonometría
- Estadística Elemental

INDICACIONES GENERALES PARA CONTESTAR LA GUÍA PCA 2021

El factor esencial para el óptimo desarrollo y comprensión de esta guía es: la disposición de los alumnos para comprender y estudiar a fondo cada parte de la guía. A continuación, se presentan algunas recomendaciones:

- Analizar cada formula en el área de teoría y ejemplos.
- Contestar cada pregunta con el procedimiento completo.
- Fortalecer cada tema con videos, libros y material extra al presentado en la guía.

EXÁMENES DE SIMULACIÓN

Como instrumento de estudio adicional, el aspirante cuenta con la plataforma Simuladorpad.com

Dicha plataforma, elaborada por profesores y expertos en su materia, tiene como objetivo medir los conocimientos adquiridos por el aspirante durante su formación escolar. Para lograr este objetivo, el aspirante cuenta con 5 exámenes de simulación, elaborados en base al temario de la universidad.

Para hacer uso de la plataforma, el aspirante solo debe ingresar a www.simuladorpad.com, registrarse y seguir los pasos que se indican dentro de la misma.

FÍSICA

Sesión 1

Introductoria

PRESENTACIÓN DE LOS COMPONENTES

A) CINEMÁTICA

1. Punto o cuerpo de referencia: Este concepto se refiere a definir un punto (comúnmente sobre un plano cartesiano) a partir del cual se va a analizar el comportamiento de algún fenómeno físico. Cada punto en el plano está definido por la posición indicada por el eje X y el eje Y, por lo que podemos identificar puntos sobre el plano utilizando la notación (x,y).

2. Distancia y desplazamiento: Es común confundir estos dos conceptos. Si un móvil se desplaza a partir del punto de origen (0,0) y describe una trayectoria que lo lleva muy lejos del origen y después regresa al punto origen (0,0), la distancia recorrida es toda esa trayectoria medida en alguna unidad de longitud, sin embargo, su desplazamiento es cero, ya que regreso al mismo punto. Por lo tanto, cuando involucramos el desplazamiento, se debe tener un punto de partida o referencia y simplemente especificar qué tan lejos está el cuerpo o móvil de ese punto de partida.

3. Aceleración: La velocidad se define como el cambio de la posición con respecto al tiempo, mientras que la aceleración es el cambio de la velocidad con respecto al tiempo y puede ser positiva (si aumenta la velocidad) o negativa (si disminuye la velocidad).
Para poder calcular la velocidad o la aceleración se usan las siguientes fórmulas:

$$v = \frac{S_f - S_i}{t_f - t_i} \qquad a = \frac{V_f - V_i}{t_f - t_i}$$

4. Movimiento vertical: Es un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en el que se lanza un cuerpo verticalmente con cierta velocidad inicial desde cierta altura y no encuentra resistencia alguna durante su trayecto.

B) DINÁMICA

5. Fuerza: Este concepto está muy relacionado con las leyes de la dinámica, que involucran la masa de los cuerpos y su aceleración: F = ma

6. Leyes de Newton: Son tres y hacen referencia a lo siguiente:

1ª ley: En la ausencia de la acción de fuerzas, un cuerpo en reposo continuará en reposo relativo y uno en movimiento se moverá en línea recta a velocidad constante.
2ª ley: Toda fuerza resultante diferente de cero al ser aplicada a un cuerpo le produce una aceleración en la misma dirección en que actúa. El valor de dicha aceleración es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.
3ª ley: Cuando un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, éste reacciona sobre el primer cuerpo (A) ejerciendo una fuerza de la misma intensidad y dirección, pero en sentido contario.

7. Masa: Se define como masa a la cantidad de materia contenida en un cuerpo. La masa de un cuerpo permanece constante sin importar en donde el cuerpo en el universo.

8. Peso: Representa la fuerza gravitacional con la que es atraída la masa (m) de un cuerpo. La fórmula para determinarlo es: $p = mg$. La aceleración de la gravedad (g) puede variar dependiendo de la posición del cuerpo en la Tierra o en otro cuerpo celeste, como por ejemplo la luna, en donde g es 6 veces menor que en la Tierra.

9. Diagramas de fuerza: Las fuerzas pueden clasificarse con base en diferentes criterios 1) Coplanares o No coplanares, 2) Fuerzas colineales o Concurrentes (o angulares), etc. Cabe resaltar que las fuerzas se pueden sumar, y esta sumatoria se representa mediante un diagrama de fuerza. Cuando un cuerpo está en reposo, la sumatoria de las fuerzas que se ejercen sobre él es 0. Si no fuera así, entonces el cuerpo estaría en movimiento.

10. Ley de gravitación universal: Esta ley establece la fuerza con la que se atraen dos cuerpos por el simple hecho de tener masa. El gran mérito de Newton fue demostrar que a partir de la ley de gravitación universal se podían derivar las leyes de Kepler. J. Kepler desarrollo 3 leyes que describen el movimiento de los planetas en el cielo:
1) La ley de la órbita: Todos los planetas se mueven en orbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos.
2) La ley de las áreas: La línea que une un planeta con el Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales.
3) La ley de los periodos: El cuadrado del periodo de cualquier planeta, es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita.

11. Cantidad de movimiento: La cantidad de movimiento es igual al producto de la masa por la velocidad: $C = mv$. Como resultado del impulso que recibe un cuerpo, éste cambia de velocidad, por lo que experimenta una variación en la cantidad de movimiento. El impulso y la cantidad de movimiento se encuentran estrechamente ligados, ya que uno genera el otro. La relación se manifiesta mediante la segunda ley de Newton.

C) ENERGÍA

12. Energía Cinética: Todo cuerpo en movimiento tiene energía cinética. La energía cinética se clasifica en: 1) Energía cinética traslacional, cuando todas sus partes siguen la misma dirección y es igual a: $ECT = 1/2\ mv^2$; y 2) Energía cinética rotacional, representada por los cuerpos que giran. El aspecto más importante a considerar en la energía cinética (sin importar su tipo) es que el cuerpo debe estar en movimiento.

13. Energía potencial gravitatoria: Cuando un cuerpo está a cierta altura se debe efectuar un trabajo igual al producto de la fuerza aplicada por la altura a la que fue desplazado. Esta energía se debe a la atracción gravitatoria ejercida por la tierra sobre el cuerpo. Se calcula a través de la siguiente formula: $EP = ph = mgh$ donde p es peso, g es la aceleración de la gravedad y h es la altura. La EP de un cuerpo localizado a cierta altura depende del nivel tomado como referencia.

OTROS CONCEPTOS IMPORTANTES

1. Colisiones Elásticas: Cuando dos cuerpos llevan cierta velocidad y se encuentran, se produce un choque. Al ocurrir, se producen fuerzas impulsivas entre ellos. Las colisiones entre los cuerpos pueden ser elásticas o inelásticas, dependiendo de si conservan o no la energía cinética al efectuarse el choque.

Una colisión es elástica cuando conserva la energía cinética, mientras que una colisión inelástica es aquella en la cual parte de la energía cinética se cambia en alguna otra forma de energía en la colisión.

2. Principio de conservación de la cantidad de movimiento: Esta ley establece que cuando dos o más cuerpos chocan, la cantidad de movimiento es igual antes y después del choque (es decir, que la cantidad de movimiento total es constante).

3. Principio de conservación de la energía: Esta ley señala que la energía que existe en el universo es una cantidad constante, no se crea ni se destruye, solo se transforma. Por lo que cuando se habla de producir energía, en realidad se refiere a la transformación de un tipo de energía a otro.

D) TERMODINÁMICA

4. Temperatura: Es una magnitud física que indica que tan caliente o frío está un cuerpo o un sistema con respecto a una medida de referencia, y es una propiedad intensiva ya que no depende de la cantidad de materia ni de su naturaleza, sino del ambiente en el que se encuentren. Existen distintas unidades para medirla: el grado Celsius (°C), los grados Fahrenheit (°F) o los Kelvin (K). Para poder convertir entre unidades de temperatura se utilizan las siguientes formulas:

- Para convertir grados Celsius: K = °C + 237
- Para convertir Kevin a grados Celsius: °C = K - 237
- Para convertir de grados Celsius a grados Fahrenheit: °F = 1.8 °C + 32
- Para convertir de grados Fahrenheit a grados Celsius: °C = (°F - 32)/1.8

5. Calor: Es la transferencia de energía calorífica de una parte de un cuerpo a otra, o entre distintos cuerpos, que se encuentran a diferente temperatura. El calor siempre fluye de los cuerpos de mayor temperatura a los de menor temperatura.

6. Propagación del calor: El calor se propaga de tres maneras diferentes:

a) Conducción: Es la propagación de calor a través de un cuerpo sólido, debido al choque entre moléculas. Los cuerpos deben estar en contacto físico para que no ocurra. Por ejemplo: cuando se acerca una barra de cobre al fuego.

b) Convección: es la propagación del calor ocasionada por el movimiento de la sustancia caliente. Por ejemplo: cuando se pone agua a hervir.

c) Radiación: es la propagación del calor por medio de ondas electromagnéticas esparcidas incluso en el vacío.

ELECTROESTÁTICA

La electrostática se define como **el estudio de las cargas eléctricas en reposo**. Cuenta con varias leyes, siendo la más importante la primera ley de la electrostática.

Esta ley nos dice que **las cargas de signos iguales se repelen, y las de signos diferentes se atraen.**

Ley de Coulomb

Nos dice que **la fuerza de atracción o repulsión entre dos cargas es directamente proporcional al producto de ambas cargas, e inversamente proporcional a la distancia que las separa elevada al cuadrado.** Matemáticamente esta ley se representa de la siguiente forma:

$$F = \frac{Kq_1\, q_2}{r^2}$$

Donde: F es la fuerza y se mide en Newtons.

q_1 y q_2 son las cargas eléctricas y se miden en Coulombs.

r es la distancia que separa a las dos cargas y se mide en metros.

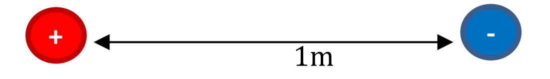
K es la constante de Coulombs y tiene un valor de $9x10^9. \frac{N\, m^2}{C^2}$

Te recomendamos que memorices este valor.

Ejemplo 1

Una carga de 2×10^{-5} C se encuentra a 1 metro de otra carga de -3×10^{-4} C.

¿Se atraen o se repelen? ¿Cuál es la magnitud de la fuerza?



Para responder estas preguntas es importante que recuerdes **la primera ley de la Electrostática, la cual dice que si las dos cargas tienen el mismo signo se repelen, y si tienen diferente signo se atraen.** Por lo tanto, la respuesta a la primera pregunta es las cargas se atraen.

Para la segunda pregunta utilizaremos la fórmula que estudiamos: $F = \frac{Kq_1 q_2}{r^2}$

Datos: $K = 9 \times 10^9 \, Nm^2 / c^2$ | $q_1 = 2 \times 10^{-5} \, C$ | $q_2 = 3 \times 10^{-4} \, C$

Observa que en q_2 se considera el valor absoluto, por lo tanto, no consideramos el signo.

$$r = 1 \text{ m}$$

El siguiente paso es sustituir en la fórmula:

$$F = \frac{Kq_1 q_2}{r^2} = \frac{\left(9x10^9 \frac{Nm^2}{C^2}\right)(2x10^{-5}C)(3x10^{-4}C)}{(1m)^2}$$

10 a la menos 9 por 10 a la menos 5 por 10 a la menos 4.

$$(10^9)(10^{-5})(10^{-4}) = 10^0 = 1$$

Recordemos que los exponentes se suman coma entonces se cancelan.

Por lo tanto, simplificamos y obtenemos:

$$F = \frac{(9)(2)(3)}{(1)} = 54N$$

Para entender el resultado hay que multiplicar 3 por 2, que es 6, por 9 y esto da 54 Newtons.

ELECTRODINÁMICA

Es el **estudio de las cargas eléctricas en movimiento.** Dentro de la electrodinámica nos encontramos con el tema de circuitos eléctricos.

Circuito eléctrico

Un **circuito eléctrico** es un **camino cerrado por donde circula la corriente eléctrica.** Hay dos tipos de circuitos: **en serie y en paralelo.** Para calcularlos es indispensable conocer las fórmulas y leyes que los rigen.

Ley de Ohm Voltaje es igual a la resistencia por la intensidad de la corriente eléctrica.

$$V = RI$$

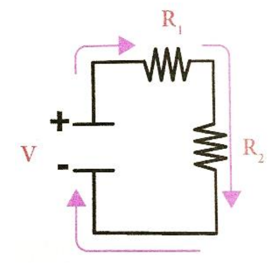
No te preocupes si se te olvida la formula, mucha gente para recordarla utiliza la frase: "Victoria es la Reina de Inglaterra."

Por otro lado, la potencia es igual al voltaje por la intensidad de la corriente eléctrica.

$$P = VI$$

Circuito en serie

Es aquel en el que **la corriente eléctrica sólo tiene un camino por donde fluir.** En la siguiente imagen las flechas moradas representan la corriente eléctrica.



Para resolver un circuito en serie usamos este formulario:

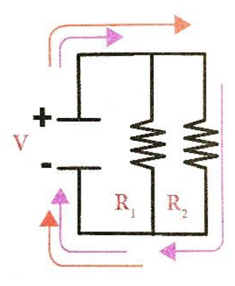
$R_{Total} = R_1 + R_2 + \ldots$

$V_{Total} = V_1 + V_2 + \ldots$

$I_{Total} = I_1 = I_1 = \ldots$

Circuito en paralelo

Es aquel en el que **la corriente eléctrica tiene varios caminos por donde fluir.** A continuación, las flechas moradas representan un camino de la corriente eléctrica y las rojas otro.



Para resolver un circuito en paralelo usamos este formulario:

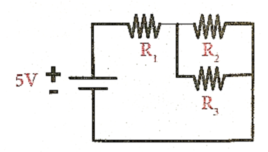
$R_{Total} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\cdots}$

$V_{Total} = V_1 = V_2 = \ldots$

$I_{Total} = I_1 + I_1 + \ldots$

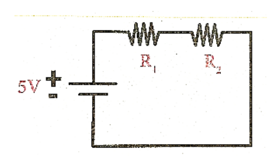
Ahora veamos un problema.

Dado el siguiente circuito serie-paralelo, cuyas resistencias valen $R_1 = 7$ ohm, $R_2 = 10$ ohm y $R_3 = 5$ ohm, determinar la intensidad de la corriente, voltaje, resistencia y potencia totales, y en cada resistencia.



El valor más sencillo de identificar es el voltaje total, ya que es un dato del problema.

$$V = 5V$$



Ahora hay que calcular la resistencia total o equivalente del circuito, para esto se resuelve en paralelo R_2 y R_3.

$$R_A = \frac{1}{\frac{1}{10\ \text{ohm}} + \frac{1}{5\ \text{ohm}}} = 3.33\ \text{ohm}$$

Después se resuelven en serie las resistencias R y R y se obtiene la resistencia total.

$$R_{TOTAL} = 7\ \text{ohm} + 3.33\ \text{ohm} = 10.33\ \text{ohm}$$

Para determinar la intensidad de corriente despejamos esta de la ley de Ohm:

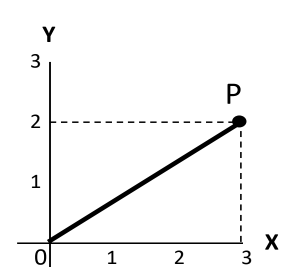
$$I_{TOTAL} = \frac{5V}{10.33\ \text{ohm}} = 0.48\ A$$

Por último, para la potencia total, sustituimos en la fórmula:

$$P = (5V)\ (0.48A) = 2.4\ W$$

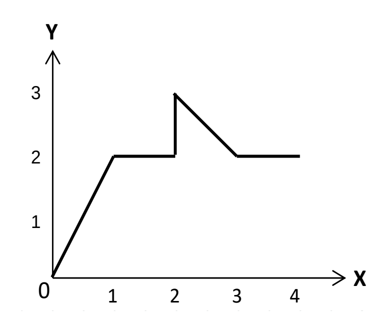
EJERCICIOS

1. De acuerdo a la figura de la derecha, la posición de la partícula P puede estar determinada de la siguiente manera:



A) (2,3)
B) (3,2)
C) (3,3)
D) (2,2)

2. De acuerdo a la figura de la derecha, ¿Cuál ha sido el desplazamiento de la partícula?



A) (2,3)
B) (3,2)
C) (3,3)
D) $\sqrt{20}$

3. Un automóvil aumenta su velocidad de 0 a 100 km/h en 5 segundos, manteniendo la velocidad por los siguientes 10 segundos. ¿Cuál es la aceleración entre los segundos 8 y 13, en m/s^2?

A) 0
B) 10
C) 30
D) 60

4. Define el movimiento de un cuerpo que desciende sobre la superficie de la tierra y no sufre ninguna resistencia originada por el aire o cualquier otra sustancia.

A) Movimiento parabólico
B) Movimiento circular
C) Caída libre
D) Movimiento armónico

5. ¿Cuál es el valor de la fuerza de Newtons que recibe un cuerpo de 50 kg, la cual produce una aceleración cuyo valor es 3 m/s^2?

A) 90
B) 100
C) 150
D) 170

6. Cuando caminamos empujamos el suelo hacia abajo y el suelo empuja nuestros pies hacia arriba, de manera que nos desplazamos en sentido contrario del empuje que ejercemos. Lo anterior es descrito por:

A) La ley de gravitación universal
B) Ley de la inercia
C) La segunda ley de Newton
D) La tercera ley de Newton

7. Cuando un astronauta viaja a la Luna, ¿Qué es lo que no cambia?

A) Masa
B) Peso
C) Inercia
D) Aceleración

8. ¿Cuál es la masa de un cuerpo cuyo peso es de 980 N?

A) 10 kg
B) 90.5 kg
C) 100 kg
D) 105 kg

9. De la figura de la derecha, ¿Cómo debe ser F_3 para que la viga permanezca en reposo?

A) Igual a F_1
B) Igual a F_2
C) Igual a la suma de F_1 y F_2
D) Igual a la diferencia de F_1 y F_2

F_3

F_1 F_2

10. El radio vector que alcanza al Sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales. Oo anterior se identifica como:

A) La primera ley de Newton
B) La segunda ley de Newton
C) Primera ley de Kepler
D) Segunda ley de Kepler

11. Un hombre de 70 kg de masa corre a una velocidad de 7 m/s, ¿Cuál es su cantidad de movimiento en kg m / s?

A) 0
B) 8.16
C) 490
D) 500

12. Un cuerpo se encuentra en reposo en lo alto de un edificio de 50 metros de altura ¿Cuánto vale su energía cinética, expresada en Joules?

A) 0
B) 25
C) 50
D) 75

13. Este tipo de energía debe su origen a la atracción gravitatoria ejercida por la Tierra en el cuerpo que se encuentra a cierta altura del suelo:

A) Energía radiante
B) Energía nuclear
C) Energía mecánica
D) Energía Potencial Gravitatoria

14. En un choque elástico entre dos cuerpos, al efectuarse el choque se conserva:

A) El impulso
B) La cantidad de movimiento
C) La energía cinética
D) La energía potencial

15. Cuando dos o más cuerpos chocan, la cantidad de movimiento antes y después del choque es:

A) Igual
B) Mayor
C) Menor
D) La suma de las cantidades de movimiento

16. Enuncia que la energía existente en el universo es una cantidad constante, no se crea ni se destruye, solo se transforma:

A) Ley de gravitación universal
B) Tercera ley de Newton
C) Ley de conservación de la materia
D) Ley de la conservación de la energía

17. Un líquido entra en ebullición a 212° F, ¿A qué temperatura equivale, en °C?

A) 100
B) 95
C) 60
D) 50

18. Se tienen 15 gramos de aluminio y se quiere elevar su temperatura de 10° C a 25° C. Si su coeficiente de calor específico es de 0.22 Cal/g °C. ¿Qué cantidad de calor se debe suministrar?

A) 62.3
B) 60.3
C) 52.5
D) 49.5

19. Es una magnitud física que corresponde a la cantidad de energía que se transfiere de un sistema a otro:

A) Temperatura
B) Calor
C) Potencial térmico
D) Grados Centígrados

20. Es la propagación del calor ocasionada por el movimiento de la sustancia caliente:

A) Conducción
B) Radiación
C) Radiación solar
D) Convección

CUADRO RÉCORD

En el siguiente cuadro encontrarás las respuestas de cada ejercicio que acabas de realizar. Coteja con las respuestas que obtuviste y coloca ✓ si obtuviste la respuesta correcta o × si no fue así. Encontrarás estos cuadros en cada sesión para que reconozcas los temas que ya tienes claros y los que hace falta que refuerces.

SESIÓN 1			
TEMA	**EJERCICIO**	**RESPUESTA**	**✓ ó ×**
FÍSICA	1	B	
	2	D	
	3	B	
	4	C	
	5	C	
	6	D	
	7	A	
	8	C	
	9	C	
	10	D	
	11	C	
	12	A	
	13	D	
	14	C	
	15	A	
	16	D	
	17	A	
	18	D	
	19	B	
	20	D	

METACOGNICIÓN

Después de verificar y analizar tus repuestas, detecta cuáles son tus fortalezas respecto al tema y cuáles son las debilidades que tienes que reforzar para mejorar tus resultados.

¿Qué debo mejorar en el tema de Física?	

DESPEDIDA

"El mundo está en manos de aquellos que tienen el coraje de soñar
y de correr el riesgo de vivir sus sueños"

ÁLGEBRA

Sesión 2

Álgebra básica

PRESENTACIÓN DE LOS COMPONENTES

a) Exponentes enteros, racionales y radicales

El exponente de una variable representa el número de veces que debe ser multiplicada por sí misma, por ejemplo, $e^4 = (e)(e)(e)(e)$.

Leyes de exponentes

Las leyes de los exponentes son muy utilizadas en Álgebra porque sirven para simplificar expresiones algebraicas. La siguiente es una tabla en donde se resumen estas leyes con distintas variables junto con un ejemplo. Considerando los exponentes ***m*** y ***n*** números enteros y las variables ***y***, ***s***, ***x***, ***u*** y ***t*** con valores reales, se tiene:

Leyes de los exponentes	Ejemplos
$y^m \cdot y^n = y^{m+n}$	$y^5 \cdot y^8 = y^{5+8} = y^{13}$
$\frac{s^m}{s^n} = s^{m-n}$	$\frac{s^8}{s^2} = s^{8-2} = s^6$
$\frac{1}{x^m} = x^{-m}$	$\frac{1}{x^4} = x^{-4}$
$x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$	Si $x = 22$ entonces $22^0 = 1$
$(u^m)^n = u^{m \cdot n}$	$(u^4)^5 = u^{4 \cdot 5} = u^{20}$
$(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$	$(x \cdot y)^6 = x^6 \cdot y^6$
$\left(\frac{s}{t}\right)^m = \frac{s^m}{t^m}$	$\left(\frac{s}{t}\right)^5 = \frac{s^5}{t^5}$

Exponentes racionales

Lo exponentes racionales son aquellas expresiones que se representan de la forma $a^{\frac{m}{n}}$, donde m y n son enteros, con $n \neq 0$, por ejemplo $x^{\frac{1}{2}}$ (que se lee: “equis a la un medio”).

Radicales

La expresión $x^{\frac{1}{2}}$ se puede expresar también como un radical $\sqrt{x}$ (que se lee: "raíz cuadrada de equis"). Esto puede extenderse a raíces terceras, cuartas, quintas, etc., como lo muestra la siguiente tabla:

Forma Racional	Forma Radical
$x^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{x}$
$x^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{x}$
$x^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{x}$
$x^{\frac{1}{m}}$	$\sqrt[m]{x}$

En general, las variables pueden tener como exponente cualquier fracción $\frac{m}{n}$, por ejemplo:

Forma Racional	Forma Radical
$x^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[3]{x^2}$
$x^{\frac{3}{4}}$	$\sqrt[4]{x^3}$
$x^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[m]{x^n}$

En la tabla de las leyes de exponentes que se mostró anteriormente puedes ver que éstas también se aplican cuando los exponentes tienen forma racional, es decir, de fracción.

Siguiendo las leyes de los exponentes tenemos lo siguiente:

Un ejemplo de **simplificación** de radicales es $\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$

Un ejemplo de **operaciones** con radicales es $\sqrt{6^2} \cdot \sqrt{x^4} = \sqrt{6^2 \cdot x^4} = \sqrt{36x^4}$

La **racionalización** de radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que facilita el cálculo de operaciones, esto se logra multiplicando el numerador por la raíz que se quiere eliminar, por ejemplo:

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

b) Valor absoluto

Si *x* es cualquier número real, su valor absoluto queda definido de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ sí } x \geq 0 \\ -x \text{ sí } x < 0 \end{cases}$$

Para cualquier pareja de números reales a y b se cumplen las siguientes propiedades de valor absoluto.

Propiedades	**Ejemplos**
$\|a\| = \|-a\|$	$\|5\| = \|-5\|$
$\|ab\| = \|a\|\|b\|$	$\|(5)(4)\| = \|5\|\|4\|$
$\|a \div b\| = \|a\| \div \|b\|$ ó bien $\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}$	$\|24 \div 2\| = \|24\| \div \|2\|$ ó $\left\|\frac{24}{2}\right\| = \frac{\|24\|}{\|2\|}$

c) Evaluación de expresiones algebraicas

Evaluar una expresión algebraica significa sustituir el o los valores dados de las variables para hallar el valor numérico de la expresión.

Por ejemplo, si se evalúan los valores de s = 5 y t = -3 en la expresión $\sqrt{s^2} - 4t$, se tiene que:

$$\sqrt{s^2} - 4t = \sqrt{5^2} - 4(-3) = 5 + 12 = 17$$

d) Operaciones con polinomios

Las expresiones algebraicas que constan de un solo término como $\frac{a^3}{5b}$ ó $201xy^7$, se llaman monomios. La suma o resta de dos monomios origina un binomio, la de tres un trinomio y en general, los de tres o más términos se determinan polinomios.

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división que normalmente se realizan sobre polinomios son para desarrollarlos o factorizarlos.

Desarrollo de polinomios

El desarrollo de polinomios que abarca la prueba de conocimiento tiene que ver con los productos notables, que son productos que aparecen a menudo y que es necesario aprenderlos. En la siguiente tabla se muestran los más comunes:

Productos notables	Ejemplos
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(5x+3y)^2 = 25x^2 + 30xy + 9y^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(2s-3t)^2 = 4s^2 - 12st + 9t^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(4+x)(4-x) = 16 - x^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(2a-2b)^3 = 8a^3 - 24a^2b + 24ab^2 - 8b^3$
$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$	$(m+1)(m^2 - m + 1) = m^3 + 1$
$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$	$(x-2y)(x^2 + xy + 4y^2) = x^3 - 8y^3$
$(a+b)(a+n) = a^2 + (m+n)a + mn$	$(5+s)(5+t) = 25 + 5(s+t) + st$

Simplificación de polinomios

La simplificación de polinomios se realiza reduciendo términos semejantes, es decir, sumando o restando aquellos que tiene las mismas variables y exponentes, pero con distinto coeficiente. Observa este ejemplo:

$$4x^6 - 4yz^2 + 4x^6 + 8yz^2$$

En este caso, los términos semejantes son: $4x^6\ y\ 4x^6$; así como $4yz^2\ y\ 8yz^2$, por lo que al efectuar las operaciones de suma o resta planteadas, el polinomio se reduce a:

$$8x^6 + 4yz^2$$

Factorización de polinomios

Dado el polinomio en forma desarrollada, factorizarlo significa dejarlo como un producto de polinomios. Para ello podemos hace uso de las propiedades de los productos notables. Por ejemplo:

Para factorizar $8m^3 - 64n^3$, se observa que $8m^3 = (2m)^3$ y que $64n^3 = (4n)^3$, por lo que se puede recurrir a la fórmula de factorización $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, obteniendo como resultado:

$$8m^3 - 64n^3 = (2m)^3 - (4n)^3 = (2m - 4n)[(2m)^2 + (2m)(4n) + (4n)^2]$$

$$= (2m - 4n)(4m^2 + 8mn + 16n^2)$$

e) Ecuaciones de primer grado con una variable

La ecuación *ax + b = 0* en donde a y b son números reales y *a ≠ 0*, se dice que es de primer grado en una variable porque tiene una sola variable que en este caso es *x* cuyo exponente es 1.

Hallar la solución o raíz de una ecuación significa encontrar el o los valores que hacen que la igualdad sea cierta. Para llegar a tal solución es necesario hacer despejes para dejar sola a la variable de un lado de la igualdad. Por ejemplo:

$$5x - 35 = 0$$
$$5x = 35$$
$$x = \frac{35}{5}$$
$$x = 7$$

f) Solución de ecuaciones con expresiones racionales, radicales y valor absoluto

Ecuaciones racionales

Las ecuaciones racionales se refieren a las ecuaciones donde al menos una incógnita está en el numerador o el denominador de una fracción. Por ejemplo:

$$\frac{4}{3x} = \frac{5}{2}$$

$$8 = 15x$$

$$x = \frac{8}{15}$$

Ecuaciones radicales

Las **ecuaciones radicales** son aquellas que tienen la incógnita bajo el signo radical. Para el caso en que la incógnita está bajo una raíz cuadrada, conviene aislar una de las incógnitas con radicales de un lado de la igualdad (aun cuando del otro lado también quede otro radical), posteriormente elevar al cuadrado y seguir despejando la variable hasta hallar la solución. Por ejemplo:

$$\sqrt{x} - 3 = 1$$

$$\sqrt{x} = 4$$

$$(\sqrt{x})^2 = (4)^2$$

$$x = 16$$

EJERCICIOS

1. Si a = 2 y b = 1, ¿Cuál es el valor de la siguiente expresión?

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2}}{b^3}$$

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{5}{6}$

C) $\frac{2}{6}$

D) $\frac{1}{2}$

2. ¿Cuál es el resultado de reducir la siguiente expresión?

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^8}}}$$

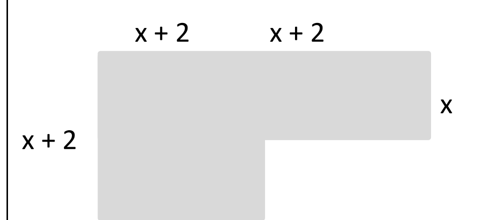
A) x

B) x^3

C) x^4

D) x^2

3. Un terreno tiene la forma que se muestra a continuación. ¿Qué expresión representa el área de dicho terreno?



A) $2x^2 + 4x + 6$

B) $3x^2 + 6x + 4$

C) $2x^2 + 6x + 4$

D) $3x^2 + 4x + 6$

4. ¿Cuál es el valor de x en la siguiente ecuación? $$\frac{3}{x+2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{x+2}+\frac{6}{4}$$ A) x = 0 B) x = 1 C) x = 2 D) x = 3	
5. El precio de las naranjas está dado por la expresión n = 4k – 9 y el de las manzanas está dado por la expresión m = 5k + 12 donde k representa el número de kilos. Ana compró k_1 manzanas y pagó $ 52. ¿Cuánto pagará por k_1 kilos naranja? A) $ 52 B) $ 50 C) $ 23 D) $ 53	
6. ¿Qué valores de x cumplen con la siguiente expresión? $$\| 5-\|x-2\|\| = 3$$ A) x = 0,4,10,6 B) x = – 6,0,4,10 C) x = 2,0,4,11 D) x = – 6,4,10,12	

7. El resultado de simplificar la expresión $$\frac{6^5\,6^4}{6^2}$$ A) 6^7 B) 6^6 C) 6^5 D) 6^4	
8. El resultado de simplificar la expresión $$\frac{2^{16}\,a^{4n+6}\,b^3}{2^{12}\,a^{3n}\,b^2}$$ es: A) $2^{20}a^{n+5}b$ B) $4^{20}a^{n+5}b^2$ C) $2^4a^{n+6}b^3$ D) $2^4a^{n+6}b$	
9. Si $x^{1/4}\,x^{1/2} = 5$ entonces $x^{6/4}$ es A) 5 B) 50 C) 125 D) 25	

10. Si a y b son dos reales ¿Cuál de las expresiones es equivalente a la indicada? $\sqrt[3]{a+b}$ A) $(a+b)^{1/3}$ B) $(a+b)^{1/2}$ C) $(a+b)^{3}$ D) $(a+b)^{2/3}$	
11. El valor positivo de x que satisface la ecuación $\|5x-18\| = 17$ es: A) x = 5 B) x = 6 C) x = 7 D) x = 8	
12. ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $\frac{5x+10}{2x} = \frac{9}{4}$? A) x = – 12 B) x = – 20 C) x = 13 D) x = 15	

13. Determinar el valor de x en la expresión $\frac{4x^5 + 8x^3}{x^3} = 42$ A) x = 4 B) x = 6 C) x = 3 D) x = 5	
14. La base de un rectángulo es $\frac{m}{2} + 5$ y su altura es $3m + 1$, ambos en metros. Si el perímetro del rectángulo es 54 metros ¿Cuánto mide la base del rectángulo? A) 9 B) 5 C) 8 D) 6	
15. El resultado de simplificar la expresión: $\frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3}$ A) x + 2 B) x – 2 C) x + 3 D) x + 4	

CUADRO RÉCORD

En el siguiente cuadro encontrarás las respuestas de cada ejercicio que acabas de realizar. Coteja con las respuestas que obtuviste y coloca ✓ si obtuviste la respuesta correcta o ✗ si no fue así. Encontrarás estos cuadros en cada sesión para que reconozcas los temas que ya tienes claros y los que hace falta que refuerces.

SESIÓN 2			
TEMA	**EJERCICIO**	**RESPUESTA**	**✓ ó ✗**
ÁLGEBRA	1	D	
	2	A	
	3	C	
	4	B	
	5	C	
	6	B	
	7	A	
	8	D	
	9	D	
	10	A	
	11	C	
	12	B	
	13	C	
	14	D	
	15	D	

METACOGNICIÓN

Después de verificar y analizar tus repuestas, detecta cuáles son tus fortalezas respecto al tema y cuáles son las debilidades que tienes que reforzar para mejorar tus resultados.

¿Qué debo mejorar en el área de Álgebra?	
¿Cuál es el proceso a realizar para mejorar mi desempeño en el área de Álgebra?	

DESPEDIDA

"El éxito no es un accidente. Es trabajo duro, perseverancia, aprendizaje, estudio, sacrificio y sobre todo, amor por lo que estás haciendo o aprendiendo a hacer"

ÁLGEBRA II

Sesión 3

Álgebra avanzada

g) Ecuaciones cuadráticas o reducibles a cuadráticas

Para encontrar los valores que hagan cierta una ecuación cuadrática, inicialmente podemos probar si se puede resolver mediante **factorización**. Por ejemplo: en el caso de la ecuación $x^2 - 10x + 25 = 0$, observamos que se puede factorizar como *(x-5)(x-5) = 0*. Estos valores se encontraron buscando dos números que sumados resulten en el coeficiente de la *x*, que en este caso es -10 y multiplicados resulten el tercer término de la ecuación, que es 25. De la factorización se puede observar que para que la igualdad se cumpla debe cumplirse que *(x-5) = 0* para ambos factores. Lo que implica que para ambos casos que *x= 5*.

Otra forma de resolver una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, es sustituyendo los valores de *a*, *b* y *c* en la **fórmula general** y resolver hasta hallar la solución. La fórmula general es:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si por ejemplo tenemos una ecuación como $5x^2 + 10x - 40 = 0$ primero se debe llevar a la forma $ax^2 + bx + c = 0$, esto lo podemos hacer dividiendo toda la ecuación entre 5, quedando como $x^2 + 2x - 8 = 0$, si queremos resolver esta ecuación **completando cuadrados**, haríamos lo siguiente

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$x^2 + 2x = 8$$

Ahora sumamos a ambos lados de la igualdad la mitad de *b* elevado al cuadrado

$x^2 + 2x + 1 = 8 + 1$, esto es

$x^2 + 2x + 1 = 9$, luego factorizamos y tendremos

$(x + 1)(x + 1) = 9$, es decir

$$(x + 1)^2 = 9$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{9}$$

$$x + 1 = 3, \qquad x + 1 = -3$$

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = -4$$

h) Resolver inecuaciones de primer grado en una variable, racional y con valor absoluto

Una inecuación es una expresión algebraica que está formada por dos miembros separados por un símbolo de desigualdad. Este símbolo puede ser $<, >, \leq y \geq$. En los casos $\leq y \geq$ el valor a encontrar está incluido en la solución mientras que en $< y >$ no lo está.

Al igual que en las ecuaciones, resolver una inecuación es hallar el o los valores que la hacer cierta, solo que las inecuaciones tienen infinitas soluciones agrupadas en un conjunto. Para representar estos conjuntos solución de forma simbólica, se utilizan paréntesis (,) para el caso de $< y >$ o bien se utilizan [,] para el caso de $\leq y \geq$. Otra representación es en la recta numérica donde los extremos del conjunto solución serán pequeños círculos vacíos para el caso $< y >$ o serán pequeños círculos rellenos para el caso $\leq y \geq$. Eventualmente se utilizan paréntesis y corchetes en lugar de los círculos.

Para resolver una inecuación se realizan los mismos pasos que en la solución de una ecuación, excepto en el caso en que se necesita multiplicar ambos miembros de la inecuación por en número negativo, ya que en esos casos se debe cambiar el sentido de la inecuación. Por ejemplo:

$$3x + 1 \leq 4x - 7$$

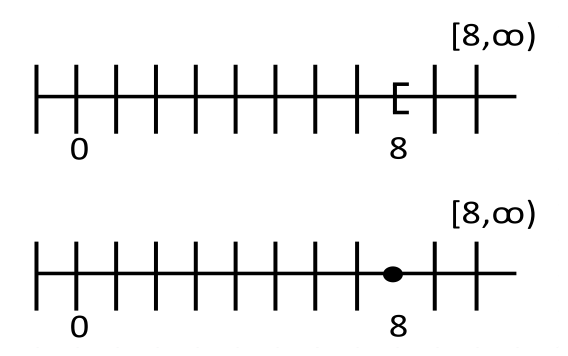
$$3x - 4x \leq -7 - 1$$

$$-x \leq -8$$

$$x \geq 8$$

Simbólicamente representamos la solución como: [8,∞). Infinito no es un número y siempre se representa con un paréntesis.

Gráficamente quedaría representado como:



Representación gráfica de intervalo semiabierto

Las **inecuaciones con racionales** se resuelven de igual forma que las ecuaciones, teniendo la misma consideración de que al multiplicarse ambos lados por un número negativo es necesario cambiar el sentido de la desigualdad.

En el caso de las **inecuaciones con valor absoluto,** se deben toma en cuenta las siguientes propiedades:
Para cualquier número real x y cualquier número positivo a:

1) $|x| < a$ se cumple si $-a < x < a$ (también se cumple para $\leq$). Se pueden resolver las inecuaciones por separado, es decir, resolver $-a < x$ primero y resolver $x < a$ después. La solución está dada por la intersección de ambas soluciones parciales.
2) $|x| > a$ se cumple si $x > a$ o $x < -a$ (también se cumple para $\geq$). La solución está dada por la unión de ambas soluciones parciales.
3) $|x| < a$ se cumple si $x^2 < a^2$ (también se cumple para $>, \geq$ y $\leq$). La solución se encuentra aplicando los métodos de resolución de una inecuación cuadrática, que a su vez se resuelve como una ecuación cuadrática con las consideraciones que involucra el manejo de los signos de desigualdad.
4) $|x| < -a$ representa al conjunto vacío (también se cumple para $\leq$)

i) Resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

El tema de ecuaciones lineales es muy extenso, en esta sesión se te presentan aspectos básicos que necesitas para saber resolverlos. Se le llama sistema de ecuaciones porque está conformado por dos o más ecuaciones y son lineales, porque las ecuaciones que las forman tienen exponente uno.
1. Resolverlos significa encontrar los valores de las variables que satisfacen todo el sistema.
2. Las soluciones las podemos encontrar por métodos algebraicos (veremos el de *reducción* o *eliminación* y el de *sustitución*) y también por métodos gráficos.

Método de reducción o eliminación
El método de reducción o eliminación, para sistemas de ecuaciones es aquel que busca simplificar el sistema a una ecuación de primer grado con una sola variable.
Para poder simplificar el sistema, debemos realizar operaciones entre las ecuaciones de tal manera que al sumarlas o restarlas podamos eliminar una variable (previamente elegida). Dichas operaciones son multiplicar las ecuaciones con los coeficientes invertidos de la variable a eliminar y buscando que queden con signos opuestos. Una vez que tenemos el valor de la primera incógnita se sustituye este valor en una de las ecuaciones originales y despejamos para hallar el valor de la segunda incógnita.

EJEMPLO: Resolver el sistema

$$\begin{aligned} \text{a} \quad 5x + 2y &= 11 \\ \text{b} \quad 6x - 4y &= -6 \end{aligned}$$

Eliminamos la variable x multiplicando la ecuación a por 6 y la ecuación b por – 5

$$\begin{aligned} (6)(5x + 2y &= 11) \\ (-5)(6x - 4y &= -6) \end{aligned}$$

Realizamos operaciones y simplificamos

$$\begin{array}{r} 30x + 12y = 66 \\ -30x + 20y = 30 \\ \hline 32y = 96 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación para y

$$y = \frac{96}{32} \quad y = 3$$

Ahora sustituimos $y = 3$ en la ecuación a (puede ser también en b) y despejamos para x

$$5x + 2(3) = 11$$

$$5x + 6 = 11$$

$$5x = 11 - 6$$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$

Las soluciones al sistema son $x = 1$, $y = 3$ que podemos comprobar sustituyendo en el sistema original

$$5x + 2y = 11; \;\; 5(1) + 2(3) = 11; \;\; 5 + 6 = 11$$
$$6x - 4y = -6; \;\; 6(1) - 4(3) = -6; \;\; 6 - 12 = -6$$

Método de sustitución

Este método consiste en despejar una de sus incógnitas en alguna de las ecuaciones y a continuación sustituirla en la otra ecuación para hallar el valor de una de las incógnitas. Una vez que tenemos el valor de la primera incógnita se sustituye este valor en una de las ecuaciones originales y despejamos para hallar el valor de la segunda incógnita.

$$2x + y = 1$$

$$x - 3y = 11$$

Despejamos x en la segunda ecuación.

$$x = 11 + 3y$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación y resolvemos.

$$2(11 + 3y) + y = 1$$

$$22 + 6y + y = 1$$

$$7y = 1 - 22$$

$$7y = -21$$

$$y = -3$$

Sustituimos este valor en el despeje realizado para x

$$x = 11 + 3y$$

$$x = 11 + 3(-3)$$

$$x = 11 - 9$$

$$x = 2$$

Las soluciones al sistema son $x = 2;\ \ y = -3$

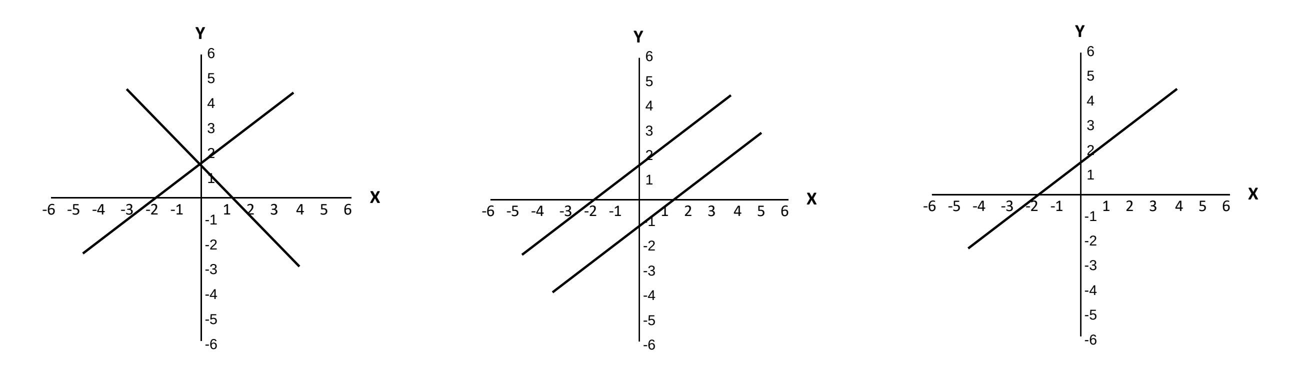
Método gráfico

Este método consiste en trazar las gráficas de ambas ecuaciones del sistema; como se trata de dos incógnitas este sistema está situado en el plano cartesiano.

Los pasos de este método son los siguientes:

1. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones
2. Se construye la tabla de valores correspondiente
3. Se representan gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados
4. De lo anterior hay tres posibilidades:

   a) Si ambas rectas se cruzan, las coordenadas de ese punto son los únicos valores de las incógnitas (*x*,*y*). Por lo que se trata de un sistema compatible determinado.
   b) Si ambas rectas coinciden en realidad se trata de la misma recta, entonces el sistema tiene infinitas soluciones que son las coordenadas de todos los puntos de esa recta. Se trata de un sistema compatible indeterminado.
   c) Si las rectas resultantes son paralelas, el sistema no tiene solución en los números reales.



Rectas que se cruzan. Una solución.

Rectas paralelas. No hay solución.

Rectas que coinciden. Infinitas soluciones.

Posibilidades de solución en el método gráfico

j) Distancia entre dos puntos del plano y punto medio de un segmento

Para calcular la distancia entre dos puntos A= (x_1, y_1) y B= (x_2, y_2) del plano cartesiano utilizamos una aplicación del Teorema de Pitágoras. Con los puntos considerados se trazan rectas paralelas a los ejes coordenados de dicho plano y construimos un triángulo rectángulo. La distancia que buscamos será la hipotenusa del triángulo rectángulo y los catetos serán las restas entre las coordenadas respectivas de los puntos A y B.

La fórmula de la distancia entre dos puntos quedará de la siguiente manera:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Por ejemplo, si nos piden la distancia que existe entre los puntos A= (2,4) y B= (8,12), si tiene:

$$x_1 = 2, y_1 = 4, x_2 = 8, y_2 = 12$$

Sustituyendo en la formula

$$|AB| = \sqrt{(8-2)^2 + (12-4)^2}$$
$$|AB| = \sqrt{(6)^2 + (8)^2}$$
$$|AB| = \sqrt{36 + 64}$$
$$|AB| = \sqrt{100}$$
$$|AB| = 10$$

Si se tiene un segmento de recta en el plano cartesiano que tiene como extremos a los puntos P_1= (x_1, y_1) y P_2= (x_2, y_2), **el punto medio M** es el que los divide en dos partes iguales. En este caso el punto medio es único y equidista de los extremos del segmento P_1 y P_2.
Las fórmulas para determinar el punto medio de un segmento, M = (x,y) son:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Tomando los puntos P_1= (6,14) y P_2= (8,2) como extremos de un segmento podemos obtener las coordenadas de su punto medio:

$$x = \frac{6+8}{2} \qquad y = \frac{14+2}{2}$$

$$x = \frac{14}{2} \qquad y = \frac{16}{2}$$

$$x = 7 \qquad y = 8$$

Es decir, M = (7,8)

k) Determinar la pendiente de una recta

La pendiente se la inclinación de una recta con respecto al eje x. Se denota con la letra m y se obtiene a partir de dos puntos de la misma recta P_1= (x_1, y_1) y P_2= (x_2, y_2) con la formula siguiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por ejemplo, si se pide hallar la pendiente de la recta que pasa por los siguientes puntos
P_1= (4,– 6) y P_2= (– 3 ,2) tenemos:

$$m = \frac{2-(-6)}{-3-4}$$

$$m = \frac{8}{-7} \quad \text{o bien} \quad m = -\frac{8}{7}$$

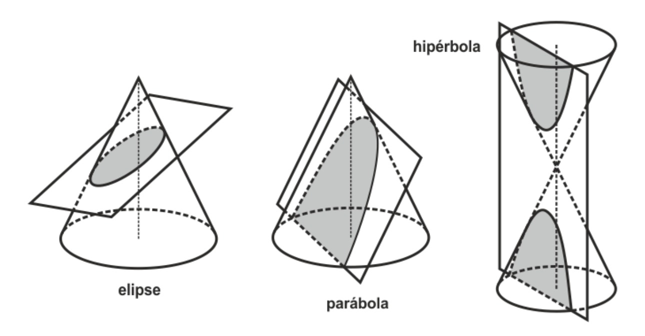
Por ejemplo, si se pide hallar la pendiente de la recta que pasa por los siguientes puntos
P_1= (4, 2) y P_2= (8,6) tenemos:

$$m = \frac{6-2}{8-4}$$

$$m = \frac{4}{4} \quad \text{o bien} \quad m = 1$$

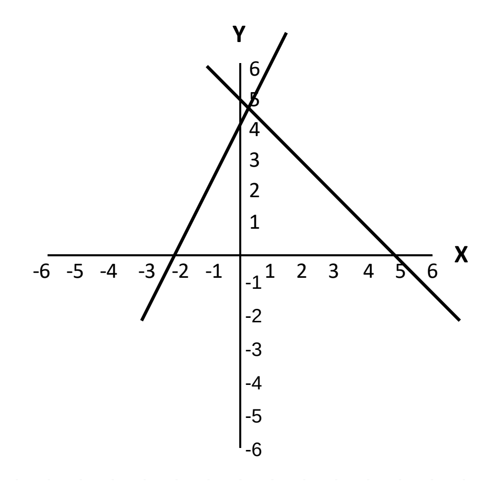
l) las secciones cónicas

Se le llama sección cónica a la curva de intersección de un cono con un plano que no pasa por su vértice.
El círculo es la sección producida por un plano perpendicular al eje, cuya ecuación tanto para el vértice horizontal como el vertical es $x^2 + y^2 = r^2$ donde r es el radio del círculo.
Por otro lado, la parábola es la sección producida en una superficie cónica de revolución por un plano oblicuo al eje, siendo paralelo a la generatriz. La parábola es una curva abierta que se prolonga hasta el infinito. Su ecuación para el eje horizontal es $y^2 = 4px$ mientras que con respecto al eje vertical es $x^2 = 4py$ .En ambos casos p es la distancia desde el vértice al foco.



Secciones cónicas

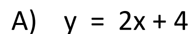
EJERCICIOS

1. ¿Cuáles son las soluciones o raíces de la ecuación $2x^2 - 11x + 5 = 0$? A) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 3$ B) $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ C) $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ D) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 5$	
2. ¿Cuáles son las soluciones o raíces de la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$? A) $x_1 = 5$, $x_2 = 1$ B) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$ C) $x_1 = -5$, $x_2 = 2$ D) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$	
3. La figura derecha muestra la representación gráfica de las rectas $y_1 = -x + 5$ $y_2 = 2x + 4$ la solución de las ecuaciones simultaneas será: A) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{14}{3}$ B) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{14}{2}$ C) $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{15}{3}$ D) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{10}{3}$	

4. Hallar la pendiente y el punto de intersección con el eje " y " de la siguiente función $$6x + 2y = 8$$ A) m = 3, (0, 4) B) m = – 3, (0, 4) C) m = 4, (0, 3) D) m = – 4, (0, 3)	
5. La ecuación $(x + 6)^2 + (y - 8)^2 = 36$ describe un circulo de radio 6. ¿Cuáles son las coordenadas del centro del círculo? A) (6, – 8) B) (6, 8) C) (– 6, 8) D) (8, – 6)	
6. ¿Cuál es el punto donde se intersecan las rectas $4x + 7y = 5;\ x - 6y = 9$? A) p = (1, 3) B) p = (3, – 1) C) p = (– 5, 9) D) p = (5, 9)	

7. Si $p(x) = 2x^2 - 8x - 24$ ¿Cuál será un cero del polinomio? A) 0 B) – 3 C) 1 D) – 2	
8. Sea el segmento de recta formado entre los puntos A(6,12) y B(4, 6). Identifica las coordenadas del punto medio del segmento. A) p = (5, 6) B) p = (4, 3) C) p = (– 5, 9) D) p = (5, 9)	
9. ¿Cuál es el conjunto de soluciones de la expresión $\mid x - 8 \mid \leq 4$? A) (4, 12) B) (4, 12] C) [4, 12] D) (4, 8)	

10. Una recta pasa por los punto A = (– 3, – 5) y B = (4, 2). Si trasladamos la misma recta de modo que corte al eje vertical en + 4. ¿Qué ecuación representa la relación?



A) y = 2x + 4

B) y = 4x + 2

C) y = –3x + 5

D) y = x + 4

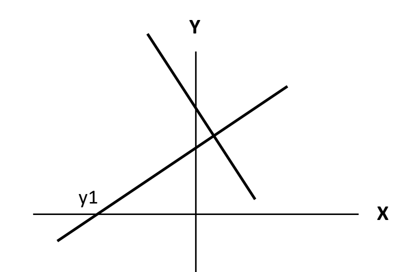
11. Una recta se representa como $y_1 = \frac{x}{3} + 4$.
¿La recta perpendicular a y_1 que intersecta al eje y en + 6 es?

A) y = – 3x – 4

B) y = 3x + 4

C) y = 4x – 6

D) y = – 3x + 6



12. Indica el radio y las coordenadas del centro de la circunferencia cuya ecuación es:

$$x^2 + (y - 4)^2 = 4$$

A) r = 1 ; c =(0, – 4)

B) r = 2 ; c =(0, – 4)

C) r = 2 ; c =(0, 4)

D) r = 2 ; c =(4, – 4)

13. Calcular los valores de las variables del siguiente sistema de ecuaciones $$4x + 7y = 29$$ $$x - 6y = -16$$ A) x = 2, y = – 3 B) x = 1, y = 1 C) x = 5, y = 2 D) x = 2, y = 3	
14. ¿Cuál es el valor del determinante de coeficientes del siguiente sistema de ecuaciones? $$4x + 8y = 1$$ $$2x - 5y = 2$$ A) 36 B) – 36 C) 22 D) – 22	
15. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por el método de determinantes $$4x + 2y = 12$$ $$5x + 4y = 18$$ A) x = 2, y = – 2 B) x = 1, y = – 2 C) x = 1, y = 2 D) x = 2, y = 2	

CUADRO RÉCORD

En el siguiente cuadro encontrarás las respuestas de cada ejercicio que acabas de realizar. Coteja con las respuestas que obtuviste y coloca ✓ si obtuviste la respuesta correcta o × si no fue así. Encontrarás estos cuadros en cada sesión para que reconozcas los temas que ya tienes claros y los que hace falta que refuerces.

SESIÓN 3			
TEMA	**EJERCICIO**	**RESPUESTA**	**✓ ó ×**
ÁLGEBRA II	1	D	
	2	C	
	3	A	
	4	B	
	5	C	
	6	B	
	7	D	
	8	D	
	9	C	
	10	D	
	11	D	
	12	C	
	13	D	
	14	B	
	15	D	

METACOGNICIÓN

Después de verificar y analizar tus repuestas, detecta cuáles son tus fortalezas respecto al tema y cuáles son las debilidades que tienes que reforzar para mejorar tus resultados.

¿Qué debo mejorar en el área de Álgebra?	
¿Cuál es el proceso a realizar para mejorar mi desempeño en el área de Álgebra?	

DESPEDIDA

"Para lograr el éxito, tu deseo debe ser mayor que tu miedo al fracaso"

GEOMETRÍA

Sesión 4

Geometría básica

PRESENTACIÓN DE LOS COMPONENTES

a) Clasificación de figuras geométricas del plano, ángulos y polígonos.

Ángulos

Definición: se denomina ángulo a la abertura comprendida entre dos rectas que se cortan en un punto. Las rectas son los lados del ángulo y el punto donde se cortan es su vértice. Para representar un ángulo se utiliza es símbolo $\angle$.

Para conocer mejor a los ángulos debemos, primero, establecer una forma de distinguirlos, es decir, una clasificación entre ellos.

Los ángulos los podemos clasificar por su medida de la siguiente manera:

Ángulos agudos.- son aquellos que miden menos de 90°

Ángulos rectos.- son aquellos que miden exactamente 90°

Ángulos obtusos.- son los que miden más de 90°

Ángulo colineal o llano.- es aquel que mide exactamente 180°

Ángulo perigonal o completo.- Es aquel que mide 360º (exactamente una vuelta)

Otra clasificación importante es la que se refiere a los ángulos que se presentan "por parejas", en esta clasificación es importante la suma de los ángulos considerados.

Ángulos complementarios.- son aquellos que suman 90º

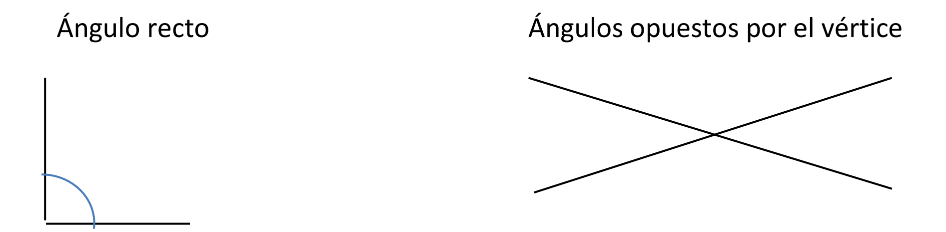
Ángulos suplementarios.- son aquellos que miden 180º

Ángulos conjugados.- son los que suman 360º

Ángulos opuestos por el vértice.- son aquellos en los que los lados de uno son la prolongación de los lados del otro.

Por ejemplo:

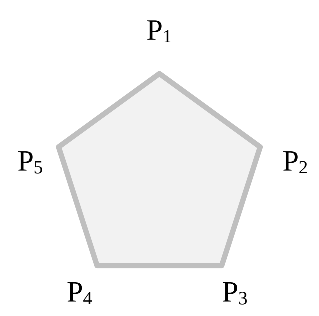
Ángulo recto　　　　Ángulos opuestos por el vértice



Clasificación de ángulos según su medida	
Ángulo agudo < 90°	Ángulo recto = 90°
Ángulo obtuso > 90°	Ángulo convexo < 180°
Ángulo colineal o llano = 180°	Ángulo cóncavo > 180°
Ángulo nulo = 0°	Ángulo completo = 360°

POLÍGONOS

Un polígono es la figura cerrada formada por **n** segmentos P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 ….. P_nP_1 $(n \geq 3)$, llamados **lados.** A los puntos P_1, P_2 ,……. P_n se les llama **vértices**.



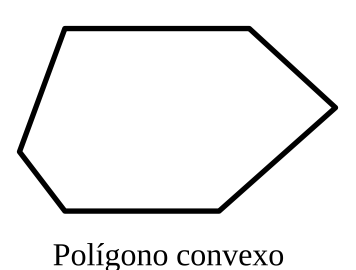
Los polígonos los podemos clasificar en regulares e irregulares. Son polígonos regulares aquellos en los que tanto los ángulos como los lados del mismo son iguales entre sí, por ejemplo, un cuadrado o un triángulo equilátero. Son polígonos irregulares aquellos que no cumplen con esa condición, por ejemplo: un rectángulo o un trapecio.

Los polígonos regulares tienen diversas propiedades como son:

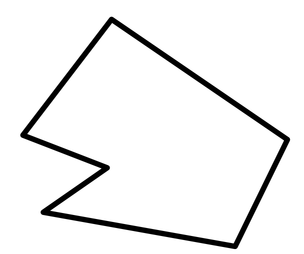
Centro.- Llamamos centro de un polígono regular al centro de la circunferencia que se construye en la parte externa del polígono (circunscrita).
Radio.- Llamamos radio de un polígono regular al segmento de recta que une el centro con un vértice.
Ángulo central.- Es el formado por dos radios consecutivos.
Apotema.- En un polígono regular, es el segmento de recta que une al centro con uno de sus lados y que además es perpendicular.
Ángulo interno.- Todos aquellos formados por dos lados consecutivos.
Ángulo externo.- Se obtienen prolongando uno de los lados; son adyacentes a un ángulo interno.
Diagonal.-Es el segmento de recta que une a dos vértices no consecutivos del polígono.

Un polígono es convexo si cada ángulo interior es menor de 180°, los polígonos convexos según el número de lados se llaman: triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, etc.

Un polígono es cóncavo si al menos uno de sus ángulos interiores es mayor de 180°.



Polígono convexo



Polígono cóncavo

Propiedades de los polígonos:

En un polígono regular de “n” lados tenemos las siguientes propiedades:

1.- Cada ángulo central mide: $\frac{360°}{n}$

2.- Cada ángulo interno mide: $\frac{180°(n-2)}{n}$

3.- Cada ángulo externo mide: $\frac{360°}{n}$

4.- La suma de ángulos internos es: $180°(n-2)$

5.- El total de diagonales que pueden trazarse desde cualquier vértice es: $n-3$

6.- La suma de todas las diagonales que se pueden trazar es: $\frac{n(n-3)}{2}$

7.- La suma de los ángulos externos es siempre igual a 360°

<table>
<tr><th colspan="5">Clasificación de las figuras y cuerpos geométricos</th></tr>
<tr><td rowspan="18">Figuras geometrícas</td><td rowspan="14">Polígonos

Nombre según los lados

3-Triángulo
4-Cuadrilátero
5-Pentágono
6-Hexágono
7-Heptágono
8-Octógono
9-Eneágono
10-Decágono
11-Endecágono
12-Dodecágono
13-Tridecágono
14-Tetradecágono
15-Pentadecágono

De más lados se nombran como polígonos de n lados

Se denominan polígonos regulares si tienen todos los ángulos y lados iguales.</td><td rowspan="6">Triángulos</td><td rowspan="3">Según los lados</td><td>Equilátero</td></tr>
<tr><td>Isósceles</td></tr>
<tr><td>Escaleno</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Según los ángulos</td><td>Acutángulo</td></tr>
<tr><td>Rectángulo</td></tr>
<tr><td>Obtusángulo</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Cuadriláteros</td><td rowspan="4">Paralelogramo</td><td>Cuadrado</td></tr>
<tr><td>Rectángulo</td></tr>
<tr><td>Rombo</td></tr>
<tr><td>Romboide</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Trapecio</td><td>isósceles</td></tr>
<tr><td>escaleno</td></tr>
<tr><td>rectángulo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Trapezoide</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Cónicas</td><td colspan="3">Circunferencia</td></tr>
<tr><td colspan="3">Parábola</td></tr>
<tr><td colspan="3">Elipse</td></tr>
<tr><td colspan="3">Hipérbola</td></tr>
</table>

b) Medidas de longitud, áreas, perímetro, capacidad, volumen y medida de longitud.

Áreas y Perímetros		
Nombre	**Figuras**	**Formulas**
Cuadrado	a a	$A = a^2$ $P = 4a$
Rectángulo	h b	$A = bh$ $P = 2b + 2h$
Paralelogramo	h a b	$A = bh$ $P = 2b + 2a$
Rombo	a D d	$A = \frac{dD}{2}$ $P = 4a$
Trapecio	b a h c B	$A = \frac{(b+B)h}{2}$ $P = a + b + B + c$
Triángulo	a h c b	$A = \frac{bh}{2}$ $P = a + b + c$
Círculo	r	$A = \pi r^2$ $P = 2\pi r$

Volúmenes

Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2\pi r\ (h + r)$	$V = \pi\ r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{total} = 4\pi\ r^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
Cono		$A_{total} = \pi\ r^2 + \pi\ r\ g$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$
Cubo		$A = 6\ a^2$	$V = a^3$
Prisma		$A = (\text{perim.base} \times h) + 2 \cdot \text{area base}$	$V = \text{área base} \times h$
Pirámide		$A = \frac{\text{perim.base} \times \text{ap lat}}{2} + \text{area base}$	$V = \frac{\text{area base} \times h}{3}$

c) Simetría, congruencia y semejanza de triángulos.

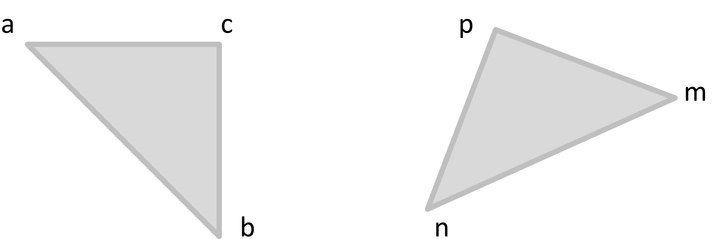
La simetría es la correspondencia exacta en tamaño y disposición de los puntos y partes de una o varias figuras o cuerpos geométricos, respecto a un punto, a una línea o a un plano. Se dice que un objeto es simétrico cuando pose al menos dos orientaciones indistinguibles. Al intercambiarlas no se genera un cambio con respecto a la orientación original. Un objeto se puede rotar, reflejar o invertir.

La simetría es central cuando ocurre respecto a un punto. La simetría es axial cuando ocurre respecto a una línea.

Inversión……………Punto: centro de inversión
Rotación……………Línea: eje de rotación
Reflexión…………. Plano: plano de reflexión

Congruencia de triángulos

Para hablar de congruencia es importante destacar que, aunque las palabras no son sinónimo, congruencia representa lo mismo que igualdad.
Decimos entonces que dos o más triángulos son congruentes cuando son iguales, es decir cuando los ángulos respectivos son iguales y cuando los lados respectivos son, también, iguales.
Los lados y ángulos respectivos se llaman homólogos.
Para establecer la congruencia no es indispensable que se tenga la misma "orientación", basta que se cumplan las condiciones indicadas.



los triángulos abc y mnp son triángulos congruentes

En este caso son homólogos los ángulos: a y n c y p m y b
Además de los lados: ab y nm bc y mp ac y pn que también son

Para establecer la congruencia de dos o más triángulos nos apoyamos en los tres siguientes criterios:

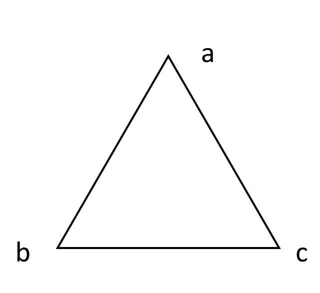
1,- *Criterio LAL*. Dos o más triángulos son congruentes si tiene iguales dos lados homólogos y el ángulo comprendido entre ellos.

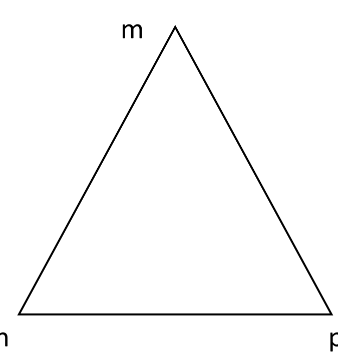
2.- *Criterio ALA*. Dos o más triángulos son congruentes si tiene iguales dos ángulos homólogos y el lado comprendido entre ellos.

3.- *Criterio LLL*. Dos o más triángulos son congruentes si tiene iguales sus tres lados homólogos.

Semejanza de triángulos

Otro tipo de triángulos que merecen atención especial son los llamados triángulos semejantes. Atendiendo el lenguaje cotidiano, decimos que semejante significa parecido. Lo mismo se utiliza en triángulo, solo que más preciso.
Dos o más triángulos son semejantes cuando sus tres ángulos miden lo mismo, pero pueden variar en tamaño. Es decir, tienen la misma forma aunque no el mismo tamaño.





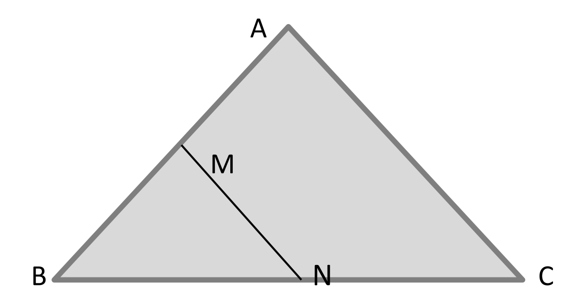
Los triángulos abc y mnp son semejantes.
En este caso los ángulos iguales son: m y a   n y b   p y c

Los triángulos semejantes tienen una especial relación entre sus lados, es decir, *los lados correspondientes son proporcionales*. Para los triángulos anteriores, representamos dicha relación de la siguiente manera:

$$\frac{ab}{mn} = \frac{ac}{mp} = \frac{bc}{np}$$

Para poder obtener triángulos semejantes consideramos al siguiente:

Teorema.- Toda recta paralela a alguno de los lados de un triángulo genera un triángulo semejante al original.



En este caso los triángulos ABC y MBN son semejantes.
La semejanza se puede representar con el símbolo $\sim$ por lo que decimos que $ABC \sim MBN$
Tenemos cuatro criterios de semejanza:

1.- Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos iguales.

2.- Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de lados homólogos proporcionales e igual ángulo comprendido entre tales lados.

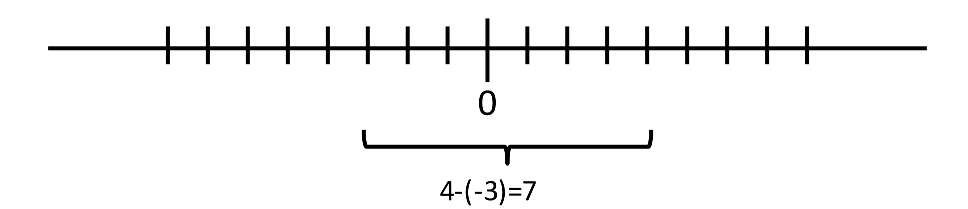
3.- Dos triángulos son congruentes si poseen sus tres lados homólogos respectivamente proporcionales.

4.- Dos triángulos son semejantes si poseen dos pares de lados homólogos proporcionales e igual el ángulo opuesto al mayor de estos lados.

d) la distancia entre dos puntos sobre la recta numérica

Para calcular la distancia entre dos diferentes puntos sobre la recta numérica únicamente debemos buscar la diferencia entre ellos.
Por ejemplo, la distancia entre los puntos 4 y – 3 deberá calcularse de la siguiente manera:

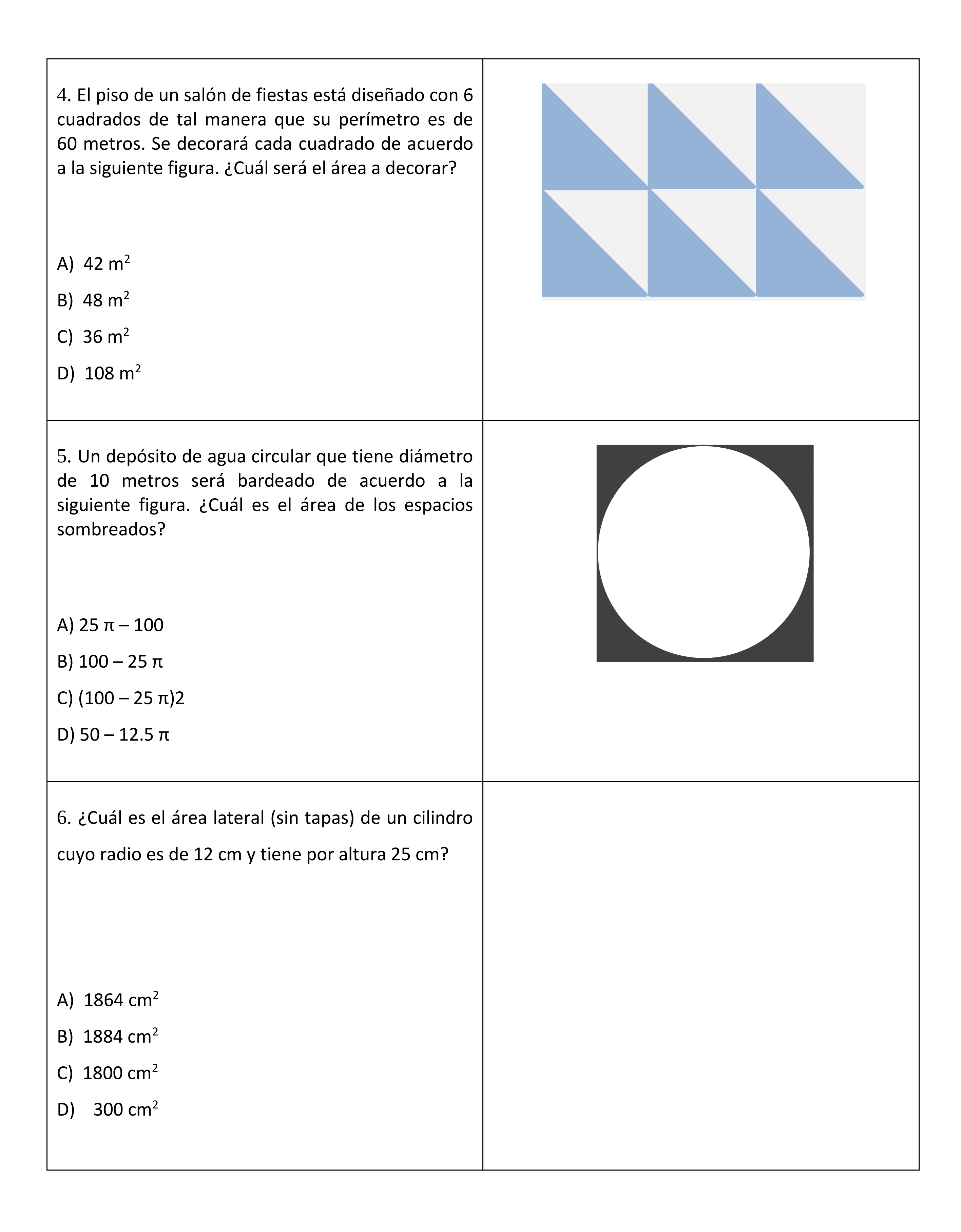
$$4-(-3)=4+3=7$$



La distancia entre dos puntos a y b sobre la recta numérica se expresa como $|a-b|$ o bien como $|b-a|$. Observamos que en el ejemplo anterior, se tienen los números 4 y – 3 y si aplicamos las fórmulas tendremos: $|4-(-3)|=7$ o bien $|-3-4|=7$.

EJERCICIOS

1. La suma de cuatro ángulos es de 330°. El primero de ellos es recto, los ángulos dos y tres son suplementarios. ¿Cuánto mide el cuarto ángulo? A) 50° B) 48° C) 45° D) 60°	
2. En la figura derecha sabemos que el ángulo b= 52°. Además, se sabe que a + c = 2b. ¿Cuánto mide el ángulo d? A) 20° B) 24° C) 25° D) 26°	a b c d
3. Una bodega tiene 4 m de largo, 5 m de ancho y 3m de alto. En ella caben 600 cajas de un producto x. La bodega se ampliará considerando el largo al doble y el ancho al triple mientras que la altura quedará igual. ¿Cuántas cajas del producto x podrá contener la nueva bodega? A) 2400 B) 1800 C) 3600 D) 3000	



4. El piso de un salón de fiestas está diseñado con 6 cuadrados de tal manera que su perímetro es de 60 metros. Se decorará cada cuadrado de acuerdo a la siguiente figura. ¿Cuál será el área a decorar?

A) 42 m^2

B) 48 m^2

C) 36 m^2

D) 108 m^2

5. Un depósito de agua circular que tiene diámetro de 10 metros será bardeado de acuerdo a la siguiente figura. ¿Cuál es el área de los espacios sombreados?

A) 25 π – 100

B) 100 – 25 π

C) (100 – 25 π)2

D) 50 – 12.5 π

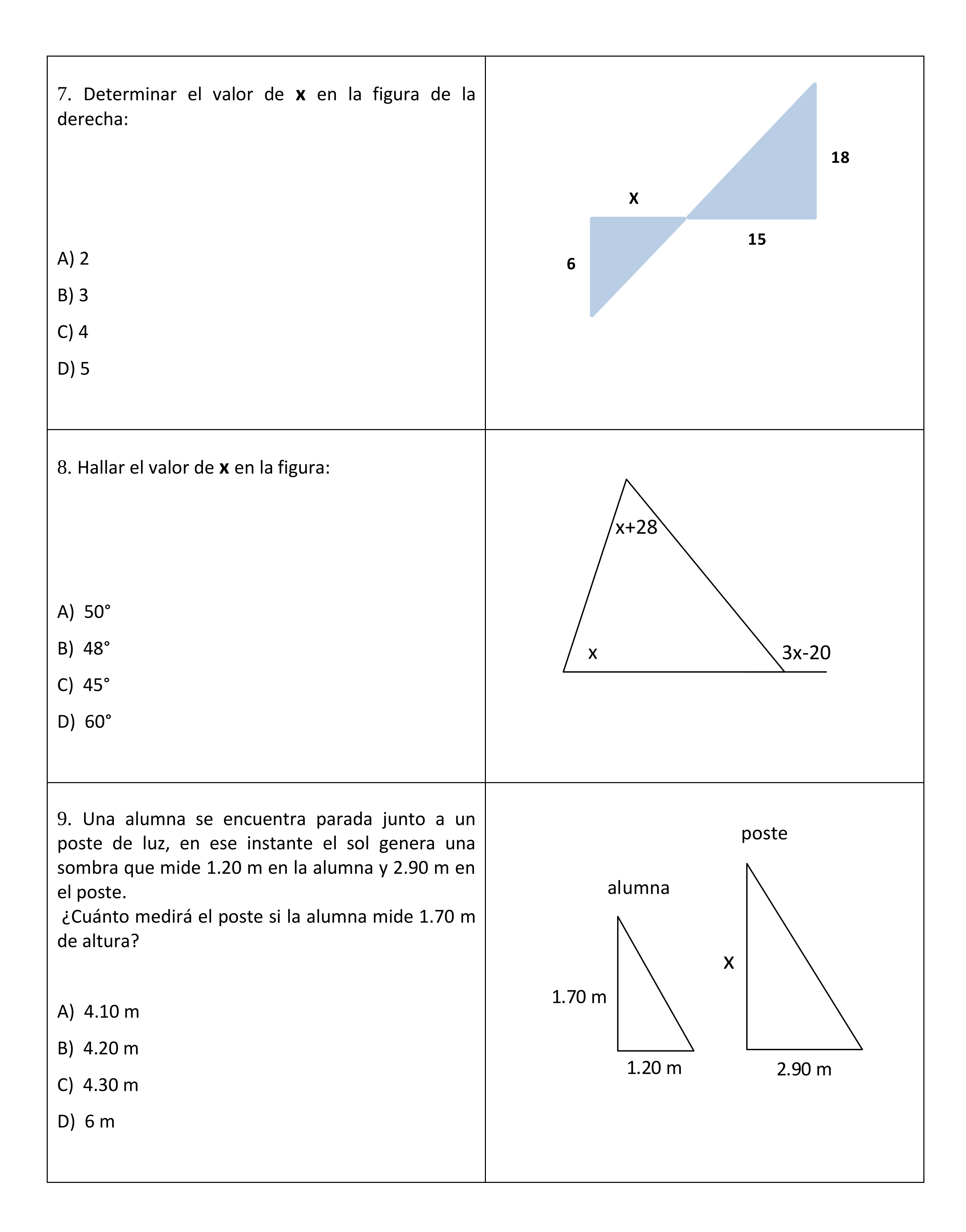
6. ¿Cuál es el área lateral (sin tapas) de un cilindro cuyo radio es de 12 cm y tiene por altura 25 cm?

A) 1864 cm^2

B) 1884 cm^2

C) 1800 cm^2

D) 300 cm^2



7. Determinar el valor de **x** en la figura de la derecha:

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

8. Hallar el valor de **x** en la figura:

A) 50°

B) 48°

C) 45°

D) 60°

9. Una alumna se encuentra parada junto a un poste de luz, en ese instante el sol genera una sombra que mide 1.20 m en la alumna y 2.90 m en el poste.
¿Cuánto medirá el poste si la alumna mide 1.70 m de altura?

A) 4.10 m

B) 4.20 m

C) 4.30 m

D) 6 m

10. ¿Qué figura geométrica deberá rotar exactamente 6 veces sobre uno de sus vértices para regresar a su posición inicial? A) Rectángulo B) Cuadrado C) Hexágono regular D) Triángulo equilátero	
11. ¿Cuál será la distancia más corta de punto p = (2,1) a la recta x – y = 0 A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}-1$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	
12. En juego infantil, Luis debe caminar sobre una línea recta para tomar los premios. Inicia caminando 8 metros hacia la derecha y después regresa 12 metros hacia la izquierda. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida? A) 4 m B) 3 m C) – 4 m D) – 3 m	
13. Calcular el valor del radio y el perímetro de una circunferencia cuya área es de 169 π. Considera π como 3.14 A) r = 11 p = 82.60 B) r = 12 p = 72.54 C) r = 10 p = 62.80 D) r = 13 p = 81.64	

CUADRO RÉCORD

En el siguiente cuadro encontrarás las respuestas de cada ejercicio que acabas de realizar. Coteja con las respuestas que obtuviste y coloca ✓ si obtuviste la respuesta correcta o ✗ si no fue así. Encontrarás estos cuadros en cada sesión para que reconozcas los temas que ya tienes claros y los que hace falta que refuerces.

SESIÓN 4			
TEMA	**EJERCICIO**	**RESPUESTA**	**✓ ó ✗**
GEOMETRÍA	1	D	
	2	B	
	3	C	
	4	D	
	5	B	
	6	B	
	7	D	
	8	B	
	9	A	
	10	D	
	11	D	
	12	A	
	13	D	

METACOGNICIÓN

Después de verificar y analizar tus repuestas, detecta cuáles son tus fortalezas respecto al tema y cuáles son las debilidades que tienes que reforzar para mejorar tus resultados.

¿Qué debo mejorar en el área de Geometría?	
¿Cuál es el proceso a realizar para mejorar mi desempeño en el área de Geometría?	

DESPEDIDA

"La educación no es preparación para la vida; la educación es la vida en sí misma"

TRIGONOMETRÍA

Sesión 5

Funciones circulares

y trigonométrica

PRESENTACIÓN DE LOS COMPONENTES

CONCEPTO BÁSICO DE TRIGONOMETRÍA

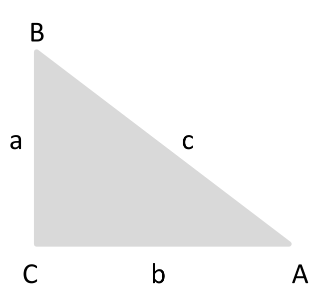
La trigonometría (que significa medición de los triángulos en griego) es una parte de las Matemáticas y en especial de la Geometría que tienen como finalidad el estudio de los Triángulos (su forma, tamaño, cálculo, etc.). Tiene como objetivo secundario auxiliar en el cálculo de otras figuras formadas por triángulos principalmente. Se considera a la Trigonometría como la base fundamental de la Ingeniería.

1. DEFINICIÓN DE FUNCIONES CIRCULARES Y FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Concepto de función trigonométrica

Una función trigonométrica, también llamada circular, es aquella se define por la aplicación de una razón trigonométrica a los distintos valores de la variable independiente, que ha de estar expresada en radianes. Existen seis clases de funciones trigonométricas: seno y su inversa, la cosecante; coseno y su inversa, la secante; tangente y su inversa, la cotangente. Para cada una de ellas pueden también definirse funciones circulares inversas: arco seno, arco coseno, etc.

Frecuentemente se definen las funciones trigonométricas para un ángulo agudo en un triángulo rectángulo. Este es un caso particular de las definiciones en el plano, ya que, al tener un punto en este último, se genera un triángulo rectángulo con la distancia del punto al origen del plano.
En este caso la abscisa corresponde al cateto adyacente; la ordenada al cateto opuesto y la distancia a la hipotenusa.
Para poder definir las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo observamos la importancia de los lados que lo forman, así como el ángulo agudo al que nos referimos.



Recordamos que los catetos son los lados que se oponen a los ángulos agudos y la hipotenusa se opone al ángulo de 90^0.
Es importante destacar que los catetos son relativos al ángulo y que, al tener un triángulo rectángulo, se pueden aplicar los tres casos del Teorema de Pitágoras.
En este caso tenemos, para el ángulo A:

Hipotenusa = Lado c
Cateto Adyacente = Lado b
Cateto Opuesto = Lado a

a. Función Seno (Sen):
La Función Seno nos describe la relación existente entre Cateto Opuesto sobre la Hipotenusa. Su simbología es la siguiente:

$$\boldsymbol{Sen\ \theta = \frac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa}} \qquad \boldsymbol{Sen\ A = \frac{a}{c}} \qquad \boldsymbol{Sen\ B = \frac{b}{c}}$$

b. Función Coseno (Cos):
La Función Coseno nos describe la relación existente entre Cateto Adyacente sobre la Hipotenusa. Su simbología es la siguiente:

$$\boldsymbol{Cos\ \theta = \frac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa}} \qquad \boldsymbol{Cos\ A = \frac{b}{c}} \qquad \boldsymbol{Cos\ B = \frac{a}{c}}$$

c. Función Tangente (Tan):
La Función Tangente nos describe la relación existente entre Cateto Opuesto sobre Cateto Adyacente. Su simbología es la siguiente:

$$\boldsymbol{Tan\ \theta = \frac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente}} \qquad \boldsymbol{Tan\ A = \frac{a}{b}} \qquad \boldsymbol{Tan\ B = \frac{b}{a}}$$

Las funciones inversas a las antes mencionadas son:

a. Función Cotangente (Cot):
La Función Cotangente nos describe la relación existente entre Cateto Adyacente sobre Cateto Opuesto. Su simbología es la siguiente:

$$\boldsymbol{Cot\ \theta = \frac{Cateto\ Adyacente}{Cateto\ Opuesto}} \qquad \boldsymbol{Cot\ A = \frac{b}{a}} \qquad \boldsymbol{Cot\ B = \frac{a}{b}}$$

b. Función Secante (Sec):
La Función secante nos describe la relación entre Hipotenusa sobre Cateto Adyacente. Su simbología es la siguiente:

$$\boldsymbol{Sec\ \theta = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Adyacente}} \qquad \boldsymbol{Sec\ A = \frac{c}{b}} \qquad \boldsymbol{Sec\ B = \frac{c}{a}}$$

c. Función Cosecante (Csc):
La Función Cosecante nos describe la relación entre Hipotenusa sobre Cateto Opuesto. Su simbología es la siguiente:

$$\boldsymbol{Csc\ \theta = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ Opuesto}} \qquad \boldsymbol{Csc\ A = \frac{c}{a}} \qquad \boldsymbol{Csc\ B = \frac{c}{b}}$$

Las funciones trigonométricas circulares

Se definen como funciones trigonométricas circulares aquellas funciones trigonométricas descritas en la circunferencia. Por simplicidad y puesto que lo permite el Teorema de Thales, se emplea la circunferencia trigonométrica (de radio unidad o uno) para el estudio de las funciones circulares.

2. Evaluación de funciones circulares y funciones trigonométricas.

Circunferencia trigonométrica

Para un punto cualquiera (x,y) se verifica, cualquiera que sea el radio r de la circunferencia que son constantes las razones **x/r, y/r,** en virtud del Teorema de Thales. Por lo cual, por simplicidad, podemos utilizar, en el estudio de las funciones circulares, la circunferencia en la que **r = 1**, es decir, la que llamaremos *circunferencia trigonométrica,* de radio unidad.

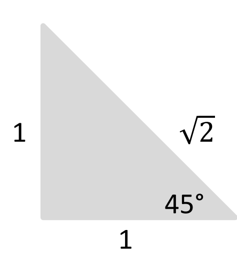
En el desarrollo del cálculo de funciones trigonométricas en la *circunferencia trigonométrica* es importante destacar los valores exactos de las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.

Funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°

Para calcular las funciones trigonométricas de 30^0, 45^0 y 60^0 es necesario tener un triángulo rectángulo con el ángulo correspondiente.

Para 45^0, por propiedades de triángulos este deberá tener catetos iguales.

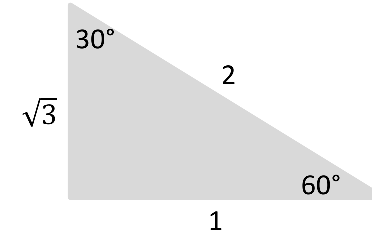
Sin perder generalidad consideramos catetos de valor 1; se calcula la hipotenusa utilizando el Teorema de Pitágoras y su resultado es $\sqrt{2}$.



Las funciones trigonométricas para 45° son:

$$Sen\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$Cos\ 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$Tan\ 45° = 1$$
$$Cot\ 45° = 1$$
$$Sec\ 45° = \sqrt{2}$$
$$Csc\ 45° = \sqrt{2}$$

Para 30^0 y 60^0, debemos hallar también un triángulo con las características adecuadas. Como los ángulos mencionados son complementarios, basta un solo triángulo rectángulo para conocer sus funciones trigonométricas. Los valores de los lados son los más generales.



Las funciones trigonométricas para 30° son:

$$Sen\ 30° = \frac{1}{2}$$
$$Cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$Tan\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$Cot\ 30° = \sqrt{3}$$
$$Sec\ 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$Csc\ 30° = 2$$

Las funciones trigonométricas para 60° son:

$$Sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$Cos\ 60° = \frac{1}{2}$$
$$Tan\ 60° = \sqrt{3}$$
$$Cot\ 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$Sec\ 60° = 2$$
$$Csc\ 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Consideramos además los signos de las funciones trigonométricas en los cuadrantes del plano

Función	1er cuadrante	2do cuadrante	3er cuadrante	4to cuadrante
Seno	+	+	−	−
Coseno	+	−	−	+
Tangente	+	−	+	−
Cotangente	+	−	+	−
Secante	+	−	−	+
Cosecante	+	+	−	−

Tomando en cuenta la circunferencia trigonométrica y los valores de las funciones trigonométricas para 30°, 45° y 60° podemos obtener las funciones trigonométricas de diversos ángulos que resumimos en la siguiente tabla.

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$Sen\ \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$Cos\ \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$Tan\ \theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	NE	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	NE	$-\sqrt{3}$
$Cot\ \theta$	NE	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	NE	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$Sec\ \theta$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	NE	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	NE	2
$Csc\ \theta$	NE	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	NE	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Definimos, ahora, a las funciones trigonométricas de la siguiente manera:

Función Trigonométrica	Función
Seno de x	f(x) = Sen(x)
Coseno de x	f(x) = Cos(x)
Tangente de x	f(x) = Tan(x)
Cotangente de x	f(x) = Cot(x)
Secante de x	f(x) = Sec(x)
Cosecante de x	f(x) = Csc(x)

3. Gráficas de funciones trigonométricas.

Una de las características de las funciones trigonométricas es que las podemos representar gráficamente, mediante el uso de las gráficas trigonométricas: las cuales tienen la finalidad de indicarnos el comportamiento asociado a las características particulares de cada función.

Al establecer relaciones entre dos conjuntos mediante las funciones trigonométricas se establecen relaciones como:

f(x) = Sen(x)	***f(x) = Cos(x)***	***f(x) = Tan(x)***
f(x) = Cot(x)	***f(x) = Sec(x)***	***f(x) = Csc(x)***

La expresión en el paréntesis se denomina argumento de la función (dominio) mientras que f(x) representa el alcance (imagen).

Las gráficas de estas funciones se extienden sobre los ejes coordenados, si es sobre el eje X, tienen la característica de repetirse por intervalos. Esto significa que cada cierta cantidad de radianes, una parte de la gráfica de la función es la misma (periodo). La extensión sobre el eje Y se conoce como alcance, rango o imagen.

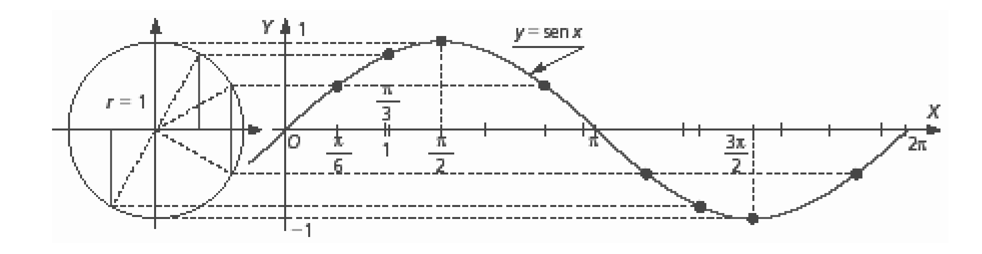
El modelo de las gráficas de las funciones trigonométricas se obtiene evaluando la función para ángulos que forman una revolución completa.

Las gráficas de las funciones trigonométricas poseen propiedades matemáticas muy interesantes como: máximo, mínimo, asíntotas verticales, alcance y periodo entre otras.

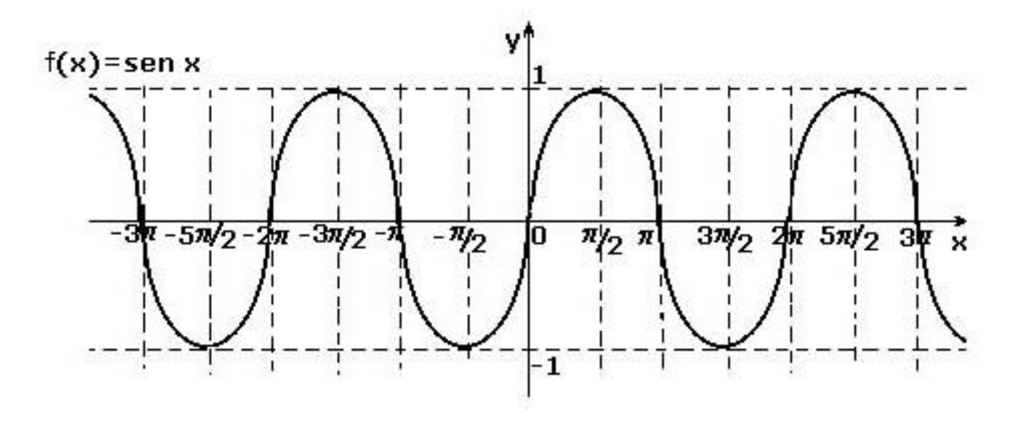
a) Gráfica de la Función Seno del ángulo

El modelo de la gráfica de la función Seno del ángulo se obtiene transfiriendo puntos del círculo unitario al sistema rectangular de coordenadas. La función Seno del ángulo utiliza la **Y** de los arcos del círculo unitario. El ciclo fundamental de la función Seno comienza en **0** y termina en $\boldsymbol{2\pi}$.

La función Seno se denota por f(x) = Sen(x), y representa a la aplicación de la razón trigonométrica Seno a una variable independiente x expresada en radianes.
La función Seno es periódica, acotada y continua, así como su dominio, por definición, es el conjunto de los números reales (R).



Gráfica de la función Seno



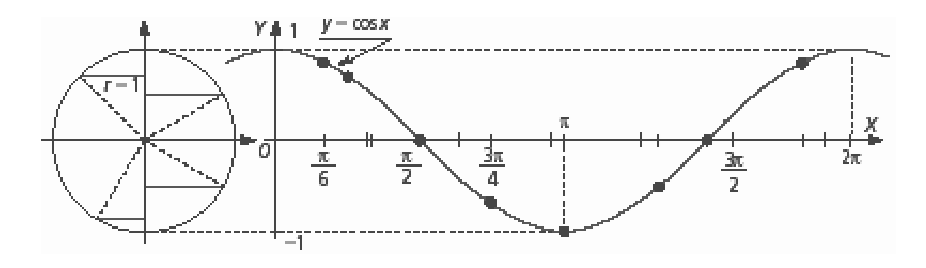
Esta función tiene un punto máximo y un punto mínimo en el ciclo fundamental de su gráfica. Las características de la gráfica de la función **f(x) = Sen(x)** son:

- Su dominio es el conjunto de los números reales (R)
- El rango de la función es **[– 1, 1]**
- Su alcance es el conjunto de números mayores o iguales que menos uno hasta los números menores o iguales que uno.
- Paridad: $\boldsymbol{Sen\ x = -Sen\ (-x)}$ [función impar]
- Su intersección en el eje Y es en **(0, 0)**
- El eje X será el eje de referencia
- El punto máximo del ciclo fundamental tiene coordenadas $\left(\frac{\pi}{2}, \mathbf{1}\right)$ es decir 90°
- El punto mínimo del ciclo fundamental tiene coordenadas $\left(\frac{3\pi}{2}, -\mathbf{1}\right)$ es decir 270°
- Su periodo es $\boldsymbol{2\pi}$

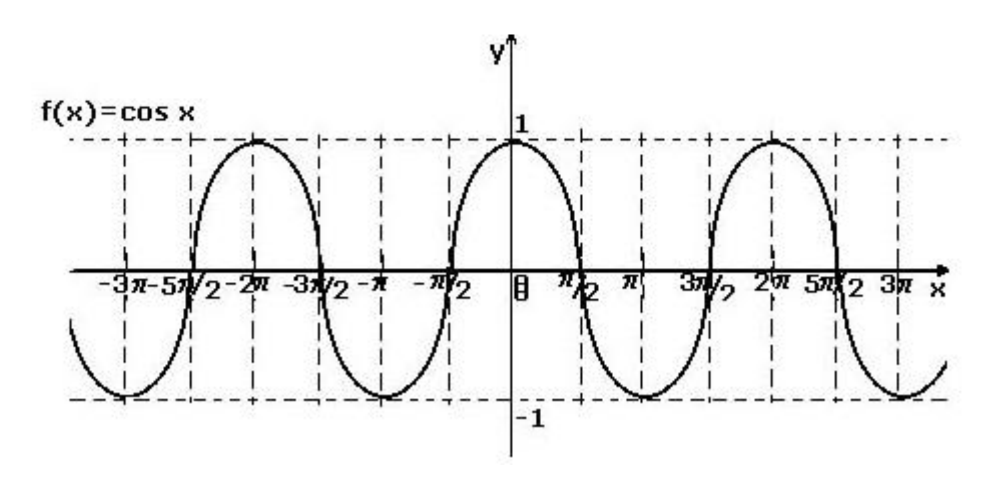
b) Gráfica de la Función Coseno del ángulo

El modelo de la gráfica de la función Seno del ángulo se obtiene transfiriendo puntos del círculo unitario al sistema rectangular de coordenadas. La función Coseno del ángulo utiliza la **X** de los arcos del círculo unitario. El ciclo fundamental de la función Coseno comienza en **0** y termina en $\boldsymbol{2\pi}$.

La función Coseno, que se denota por f(x) = Cos(x), es la que resulta de aplicar la razón trigonométrica Coseno a una variable independiente x expresada en radianes.
La función Coseno es periódica, acotada y continua, así como su dominio, por definición, es el conjunto de los números reales (R).



Gráfica de la función Coseno



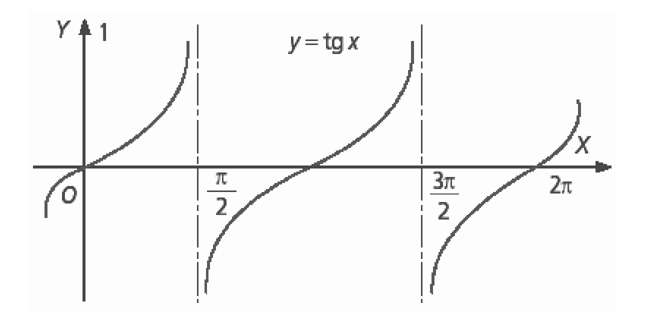
Esta función tiene un punto máximo y un punto mínimo en el ciclo fundamental de su gráfica. Las características de la gráfica de la función **f(x) = Cos(x)** son:

- Su dominio es el conjunto de los números reales (R)
- El rango de la función es **[– 1, 1]**
- Su alcance es el conjunto de números mayores o iguales que menos uno hasta los números menores o iguales que uno.
- Paridad: $\boldsymbol{Cos\ x = \ Cos}\ (-\boldsymbol{x})$ [función par]
- Su intersección en el eje Y es en **(0, 1)**
- El eje X será el eje de referencia
- El punto máximo del ciclo fundamental tiene coordenadas **(0, 1)** es decir 0° y $(\boldsymbol{2\pi}, \mathbf{1})$ es decir 360°
- El punto mínimo del ciclo fundamental tiene coordenadas $(\boldsymbol{\pi}, -\mathbf{1})$ es decir 180°
- Su periodo es $\boldsymbol{2\pi}$

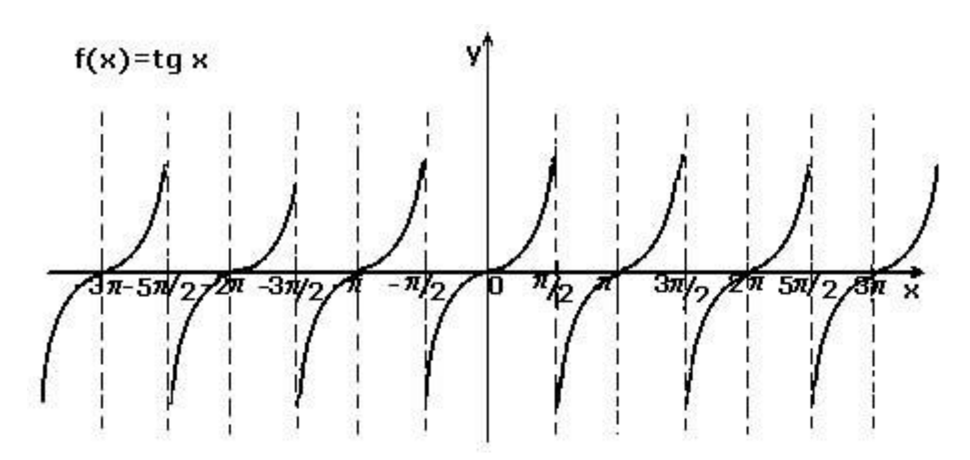
c) Gráfica de la Función Tangente del ángulo

El modelo de la gráfica de la función Tangente del ángulo se obtiene transfiriendo puntos del círculo unitario al sistema rectangular de coordenadas. La función Tangente del ángulo es el cociente de la **Y** y la **X** de los arcos del círculo unitario. El ciclo fundamental de la función Tangente comienza en $-\frac{\pi}{2}$ y termina en $\frac{\pi}{2}$. En la primera se observa la relación entre la circunferencia unitaria y la gráfica de la función tangente del ángulo.

La función Tangente, que se denota por f(x) = Tan(x), es la que resulta de aplicar la razón trigonométrica Tangente a los distintos valores de la variable independiente x expresada en radianes.



Gráfica de la función Tangente



Esta función no tiene un punto máximo y un punto mínimo en el ciclo fundamental de su gráfica. Las características de la gráfica de la función **f(x) = Tan(x)** son:

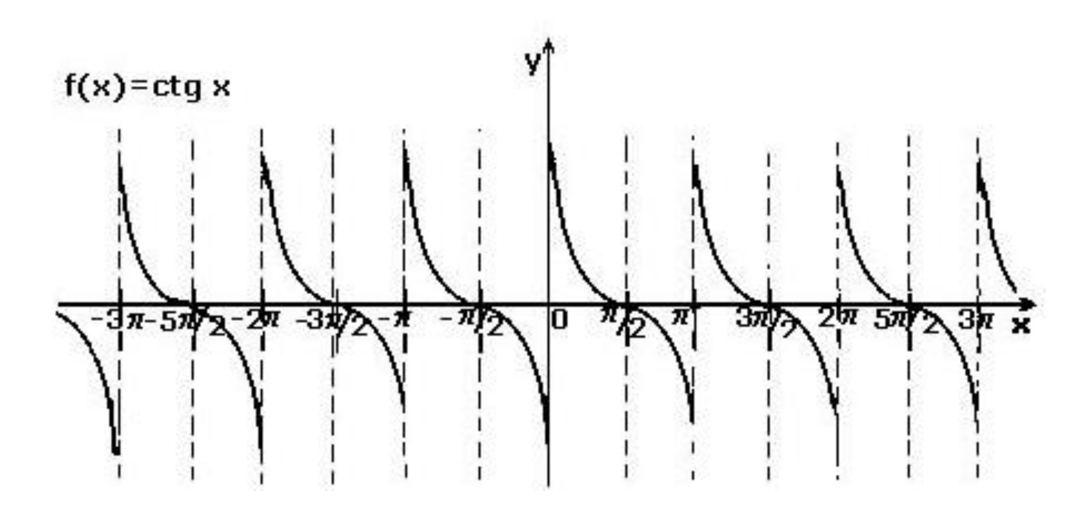
- Su dominio es el conjunto R – ($\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, …..)
- El rango de la función son todos los números reales
- Su alcance es el conjunto de números reales
- Su intersección en el eje Y es en **(0, 0)**
- El eje X será el eje de referencia
- Las asíntotas del ciclo fundamental son $\boldsymbol{x} = \pm\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$
- Su periodo es $\boldsymbol{\pi}$
- Paridad: $\boldsymbol{Tan\ x} = \ -\boldsymbol{Tan}\ (-\boldsymbol{x})$ [función impar]

d) Gráfica de la Función Cotangente del ángulo

La función **Cotangente** es la **inversa** de la función **Tangente** para cualquier ángulo indicado en radianes.

El modelo de la gráfica de la función Cotangente del ángulo se obtiene transfiriendo puntos del círculo unitario al sistema rectangular de coordenadas. La función Cotangente del ángulo es el cociente de la **X** y la **Y** de los arcos del círculo unitario. El ciclo fundamental de la función Cotangente comienza en **0** y termina en $\boldsymbol{\pi}$.

La función Cotangente, que se denota por f(x) = Cot(x), es la que resulta de aplicar la razón trigonométrica Cotangente a los distintos valores de la variable independiente x expresada en radianes.



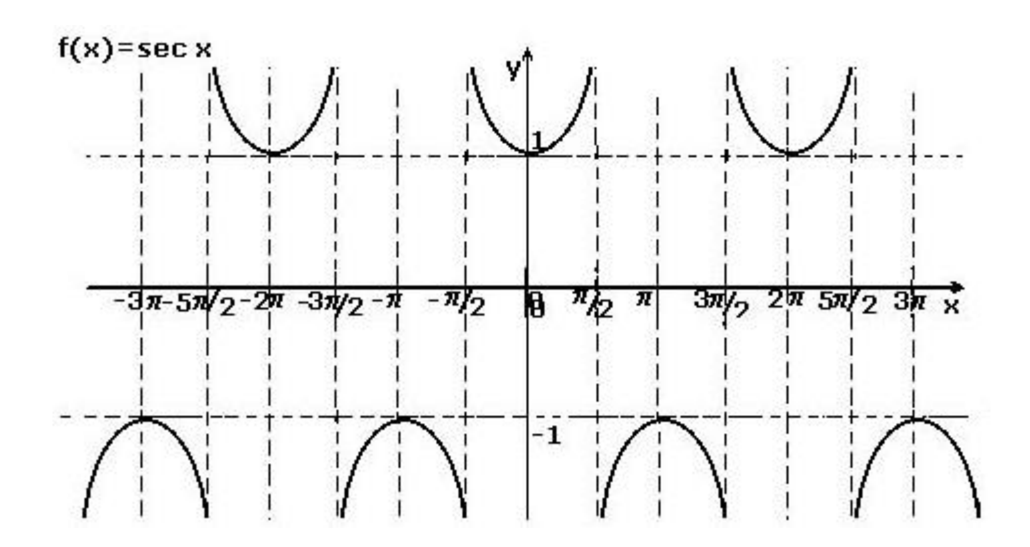
Esta función no tiene un punto máximo y un punto mínimo en el ciclo fundamental de su gráfica. Las características de la gráfica de la función **f(x) = Cot(x)** son:

- $\boldsymbol{f(x) = Cot\ x = \frac{1}{Tan\ x}}$
- Su dominio es el conjunto R – ($\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi$, …..)
- El rango de la función son todos los números reales
- Su alcance es el conjunto de números reales
- No tiene intersección en el eje Y
- El eje X será el eje de referencia
- Las asíntotas del ciclo fundamental son $\boldsymbol{x = \pi}$ y $\boldsymbol{x = 0}$
- Su periodo es $\boldsymbol{\pi}$
- Paridad: $\boldsymbol{Cot\ x = -Cot\ (-x)}$ [función impar]

e) Gráfica de la Función Secante del ángulo

La función **Secante** es la **inversa** de la función **Coseno** para cualquier ángulo indicado en radianes.

El modelo de la gráfica de la función Secante del ángulo se obtiene transfiriendo puntos del círculo unitario al sistema rectangular de coordenadas o buscando los recíprocos de la función coseno. La función Secante del ángulo es el recíproco de la **X** de los arcos del círculo unitario. El ciclo fundamental de la función Secante comienza en $-\frac{\pi}{2}$ y termina en $\frac{3\pi}{2}$



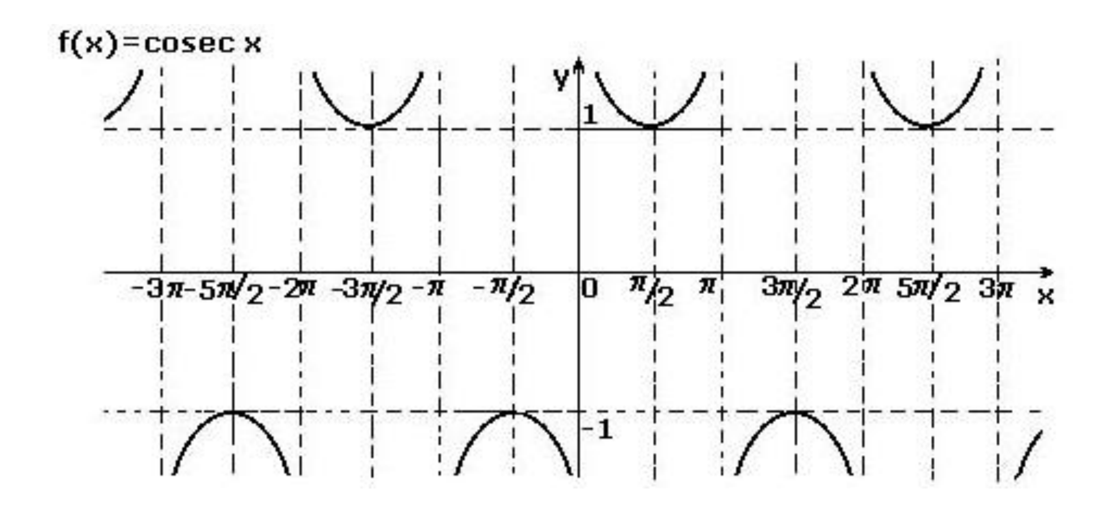
Esta función tiene un punto máximo y un punto mínimo en el ciclo fundamental de su gráfica. Las características de la gráfica de la función **f(x) = Sec(x)** son:

- $f(x) = Sec\ x = \frac{1}{Cos\ x}$
- Su dominio es el conjunto R – ($\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}$, ...)
- El rango de la función es R – [– 1, 1]
- Su alcance es el conjunto de todos los números menores o iguales que menos uno y todos los números mayores o iguales que uno.
- Su intersección en el eje Y es en **(0, 1)**
- El eje X será el eje de referencia
- El punto máximo del ciclo fundamental tiene coordenadas $(\pi, -1)$
- El punto mínimo del ciclo fundamental tiene coordenadas **(0, 1)**
- Las asíntotas del ciclo fundamental son $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$
- Su periodo es 2π
- Paridad: $Sec\ x = Sec\ (-x)$ [función par]

f) Gráfica de la Función Cosecante del ángulo

La función **Cosecante** es la **inversa** de la función **Seno** para cualquier ángulo indicado en radianes.

El modelo de la gráfica de la función Cosecante del ángulo se obtiene transfiriendo puntos del círculo unitario al sistema rectangular de coordenadas o buscando los recíprocos de la función Seno. La función Cosecante del ángulo es el recíproco de la **Y** de los arcos del círculo unitario. El ciclo fundamental de la función Cosecante comienza en **0** y termina en $\boldsymbol{2\pi}$



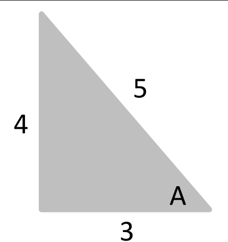
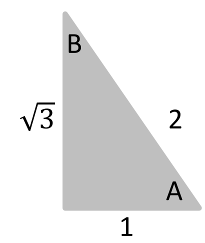
Esta función tiene un punto máximo y un punto mínimo en el ciclo fundamental de su gráfica. Las características de la gráfica de la función **f(x) = Csc(x)** son:

- $\boldsymbol{f(x) = Csc\ x = \frac{1}{Sen\ x}}$
- Su dominio es el conjunto R – $(\pm n\pi)$
- El rango de la función es R – [– 1, 1]
- Su alcance es el conjunto de todos los números menores o iguales que menos uno y todos los números mayores o iguales que uno.
- No tiene intersección en el eje Y
- El eje X será el eje de referencia
- El punto máximo del ciclo fundamental tiene coordenadas $(\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}, \boldsymbol{-1})$
- El punto mínimo del ciclo fundamental tiene coordenadas $\boldsymbol{(\frac{\pi}{2}, 1)}$
- Las asíntotas del ciclo fundamental son $\boldsymbol{x = 0\ x = \pi, x = 2\pi}$
- Su periodo es $2\boldsymbol{\pi}$
- Paridad: $\boldsymbol{Csc\ x = -Csc\ (-x)}$ [función impar]

EJERCICIOS

1. ¿Cuál será el valor del ángulo A si sabemos que Sen A = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, Cos A = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y Tan A = 1? A) 0° B) 25° C) 30° D) 45°	
2. ¿Cuál será el valor del ángulo A si sabemos que Sen A = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, Cos A = $\frac{1}{2}$ y tan A = $\sqrt{3}$? A) 0° B) 25° C) 30° D) 60°	
3. Tomando en cuenta las funciones trigonométricas de 30°, indica el valor correcto de sen 150° A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	

4. Indica la función trigonométrica cuyo dominio son todos los números reales, que tiene como rango es [– 1, 1] y además es par. A) seno B) coseno C) tangente D) cotangente	
5. Indica la función trigonométrica impar cuyo dominio es R – (π, -π, 2π, -2π, 3π, -3π……) y cuyo rango es R. A) seno B) coseno C) tangente D) cotangente	
6. ¿Qué función trigonométrica representa la gráfica de la derecha? A) seno B) coseno C) tangente D) cotangente	

7. Calcula los valores de las funciones seno, coseno y tangente respectivamente para el ángulo A del triángulo de la derecha. A) $\frac{3}{4},\frac{5}{3},\frac{4}{3}$ B) $\frac{5}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{3}$ C) $\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{3}$ D) $\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{3}{4}$	
8. Indica los valores de los ángulos A y B del triángulo de la derecha: A) 30° y 30° B) 60° y 60° C) 50° y 40° D) 60° y 30°	
9. Si sabemos que $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ entonces ¿Cuál será el valor de sec 30°? A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	

10. Si tan 45 = 1 entonces ¿cuál será el valor de cot 45°?

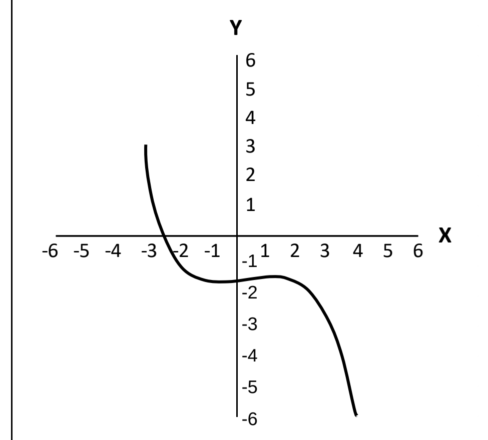
A) 3

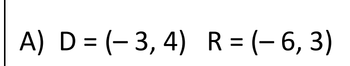
B) – 1

C) 1

D) $-\sqrt{3}$

11. Indica el dominio y el rango de la gráfica de la derecha:



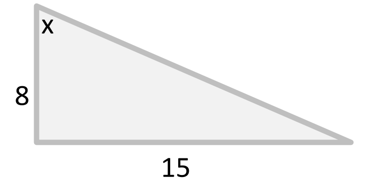

A) D = (– 3, 4) R = (– 6, 3)

B) D = (– 6, 3) R = (– 3, 4)

C) D = (– 2, 3) R = (– 5, 2)

D) D = (– 3, 4) R = (– 5, 2)

12. Calcula el valor del sen x en el triángulo rectángulo de la derecha.

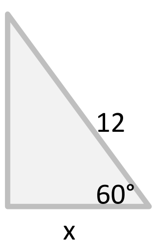


A) $sen\ x = \frac{15}{8}$

B) $sen\ x = \frac{8}{15}$

C) $sen\ x = \frac{8}{17}$

D) $sen\ x = \frac{15}{17}$

13. De acuerdo con el siguiente triángulo rectángulo y utilizando funciones trigonométricas ¿Cuál es el valor de x?  A) 5 B) 6 C) 8 D) 7	

CUADRO RÉCORD

En el siguiente cuadro encontrarás las respuestas de cada ejercicio que acabas de realizar. Coteja con las respuestas que obtuviste y coloca ✓ si obtuviste la respuesta correcta o ✗ si no fue así. Encontrarás estos cuadros en cada sesión para que reconozcas los temas que ya tienes claros y los que hace falta que refuerces.

SESIÓN 5			
TEMA	**EJERCICIO**	**RESPUESTA**	**✓ ó ✗**
TRIGONOMETRÍA	1	D	
	2	D	
	3	A	
	4	B	
	5	D	
	6	C	
	7	C	
	8	D	
	9	A	
	10	C	
	11	A	
	12	D	
	13	B	

METACOGNICIÓN

Después de verificar y analizar tus repuestas, detecta cuáles son tus fortalezas respecto al tema y cuáles son las debilidades que tienes que reforzar para mejorar tus resultados.

¿Qué debo mejorar en el área de Trigonometría?	
¿Cuál es el proceso a realizar para mejorar mi desempeño en el área de Trigonometría?	

DESPEDIDA

"Si te cansas, aprende a descansar no a renunciar"

PROBABILIDAD

Y ESTADÍSTICA

Sesión 6

Análisis de datos

PRESENTACIÓN DE LOS COMPONENTES

Existen muchas definiciones de Estadística, pero en síntesis la podemos definir como una rama de las Matemáticas que se considera ciencia formal y se aplica como una herramienta que se encarga del estudio del uso y análisis de datos provenientes de una muestra que representan a una población determinada; tiene la finalidad de explicar las correlaciones y dependencias que existen en un fenómeno ya sea físico o natural y sus ocurrencias en forma aleatoria o condicional.

Otra conceptualizaciones aquella que define a la Estadística como la rama de la Matemática que se ocupa de recolectar, organizar, presentar, analizar e interpretar información cuantitativa para obtener conclusiones válidas, solucionar problemas, predecir fenómenos y ayudar a una toma de decisiones más efectiva.

Actualmente el campo de aplicación de la estadística es muy amplio, se podría afirmar que es la rama de las matemáticas que tiene más aplicaciones en otras áreas del conocimiento; además, los conocimientos matemáticos necesarios para desarrollarla, en sus conceptos básicos, son elementales.

El método estadístico se basa en la elaboración de encuestas, las cuales son el conjunto de entrevistas, cuestionarios o consultas que se realizan con el propósito de recopilar datos.

Una vez realizada la encuesta, hay que organizar los datos de modo que se obtenga una descripción de las observaciones efectuadas que resuma la información recopilada. Esto se logra con la tabulación y asignación de parámetros estadísticos (Estadística Descriptiva). Los datos pueden ser resumidos ya sea numéricamente o gráficamente y se presentan por medio de parámetros estadísticos como: media, mediana, moda, desviación estándar etc.

La interpretación de los resultados de una encuesta permite inferir propiedades de la ***población*** de sujetos estudiados apoyándose en una ***muestra*** de ellos (Inferencia estadística).

Observamos entonces que, para su estudio, la Estadística se ha dividido en

$$Estadística\begin{cases} Descrítiva \\ Inferencial \end{cases}$$

a) Población y muestra

Dada la importancia que tienen, definimos población y muestra de la siguiente manera:

Población es el conjunto de todos los individuos (objetos) en los que se desea estudiar cierta característica o propiedad.

Muestra es un grupo de la población donde se estudia la característica y debe ser una autentica representación de la población (tanto en número como en diversidad). Entre más representativa sea la muestra de la población, los resultados obtenidos serán más certeros.

La población y la muestra se clasifican de la siguiente manera:

$$Población\begin{cases} Finita \\ Infinita \end{cases} \qquad Muestra\begin{cases} Grande \\ Pequeña \end{cases}$$

Se considera una **población finita** cuando el número de elementos que componen la población es limitado como el número de aspirantes a realizar un examen de admisión. Se considera **población infinita** cuando el número de elementos que componen la población es demasiado grande como el número de estrellas del firmamento.

El tamaño de la muestra es relativo al tamaño de la población sin embargo existen algunos autores que toman como elemento de clasificación a la cantidad 30 de elementos, es decir, más de 30 es muestra grande y menos de 30 es muestra pequeña.

Para obtener resultados de un estudio, generalmente se aplica una encuesta o la observación directa de un fenómeno. Una vez elaborada la encuesta debe ser aplicada, la población se elige de acuerdo al objetivo de la misma, pero a menudo la población encuestada es demasiado grande o bien esta debe ser desechada (vida de un foco), entonces se selecciona una muestra. Esta debe ser una autentica representación de la población tanto en número como en composición. Los porcentajes de la muestra deben coincidir con los de la población, por ejemplo, si en una población existe un 60% de hombres, la muestra deberá tener un 60% de hombres; si en la población existe un 45% de menores de edad, la muestra deberá tener tal porcentaje.

b) Variables discretas y continuas

La forma más adecuada de organizar datos es mediante el uso de categorías, sin embargo, nuestra capacidad de categorizar está limitada por la naturaleza de las variables que usamos. En términos estadísticos, las variables que interesa medir pueden ser discretas o continuas.

Las **variables discretas** son aquellas que solo pueden tomar valores muy específicos, por ejemplo, el género de una persona que solo es hombre y mujer. Otros ejemplos serían la nacionalidad de una persona, su estado civil etc.

Las **variables continuas** no son tan fáciles de categorizar ya que pueden tomar cualquier valor a lo largo de un continuo, por ejemplo: la duración de una llamada telefónica, el ingreso de una familia, el peso exacto de una persona, etc.

La distinción entre variables discretas y continuas es de gran utilidad en la estadística. Podemos decir que las variables continuas son aquellas que, por su manera de presentarse, usan valores decimales. Las variables continuas suelen agruparse en intervalos o clases.

c) Representación gráfica de datos estadísticos

Para la representación de los diferentes datos estadísticos, independientemente de uso de la tabla de distribución de frecuencias, es de mucha utilidad emplear distintos tipos de gráficas como son: gráfica de barras, pictóricas, histograma, lineal y circular. Posiblemente las gráficas que mayor “popularidad” o uso tienen son las gráficas de barras, los polígonos de frecuencias y las gráficas circulares.

Las gráficas de barras o histograma representan las frecuencias absolutas de cada una de las clases de los datos continuos o de los valores en datos discretos.

El polígono de frecuencias relaciona, mediante una recta, las distribuciones de frecuencias de los datos estudiados.

La gráfica circular, como su nombre lo indica, representa en un círculo los valores estudiados de acuerdo a su frecuencia.

d) Medidas de tendencia central

Dentro de la estadística es frecuente que los datos a manejar sean bastante numerosos, por lo que se hace indispensable buscar maneras, relativamente fáciles, de interpretar esta gran cantidad de resultados.
Uno de los fines importantes de la estadística descriptiva es el de resumir esa gran cantidad de datos en unos pocos números que nos proporcionen una idea, lo más cercana posible, del comportamiento de todos los elementos de la población estudiada. Los mencionados reciben el nombre de **parámetros centrales o medidas de tendencia central**
Los parámetros centrales tienen como objetivo agrupar los datos de toda la población, alrededor de un solo número que será su representante.
Los parámetros centrales son de gran utilidad para el manejo de datos estadísticos y los más importantes son:

Media aritmética
Mediana
Moda

Media aritmética
Este es, posiblemente, el parámetro de mayor frecuencia en la estadística, no solo es un representante del promedio de los valores de toda la población, sino también es un auxiliar en el cálculo de otros parámetros.
La media aritmética, para un conjunto de datos se define como:

$$X = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n}{n}$$

es decir, la media aritmética de un conjunto de n valores numéricos es el cociente de dividir la suma de todos los valores por el número de ellos. La media aritmética se conoce frecuentemente como **promedio.**

Moda
De los parámetros centrales, posiblemente sea la moda el que resulta más evidente.
***Se llama moda de un conjunto de datos a aquel valor que se presenta con más frecuencia*.**
En base a la definición, se puede presentar el caso en que un conjunto de datos no tenga moda, que tengan una moda o bien que tengan varias modas.
El primer caso es cuando en el conjunto de datos, ninguno se repite.
En el segundo caso hablamos de un valor modal, es decir, con más frecuencia.
En el tercer caso consideramos conjuntos de datos que tienen varios valores modales. Si existen dos valores modales, la muestra es bímodal; si existen tres valores modales, la muestra es trímodal, etc.
La moda no es tan representativa como la media aritmética, pero es útil en algunas ocasiones, sobre todo en aquellas muestras donde un valor se destaca claramente sobre los demás o cuando este parámetro se desea conocer (como en elecciones).
A pesar de esto, la moda tiene un significado real, ya que representa, al analizar el problema, la preferencia de una población (pensemos por ejemplo en cierta ciudad para vivir, un hospital para ser atendido, el querer trabajar en cierta empresa, etc.)

Mediana
La mediana es un parámetro estadístico que se obtendrá después de ordenar los datos. En términos generales no siempre es necesario que se ordenen los datos, pero en este caso sí y deberá ser en forma creciente, siempre que tal ordenación sea posible.
La definición correspondiente es la siguiente:
Se llama mediana **a aquel valor x_m que ocupa el lugar central de un número impar de datos ordenados; o a la media aritmética de los valores centrales, x_m y x_{m+1} si el número de datos es par.**

La mediana se utiliza especialmente en los casos siguientes:
- Cuando se trata con datos cualitativos que pueden ser ordenados.
- Cuando los datos estadísticos poseen valores extremos que afectan demasiado el valor de la media.

La mediana, tiene la propiedad de que el cincuenta por ciento de los datos son menores o iguales a ella y el cincuenta por ciento restante son mayores o iguales; es decir, la mediana divide al conjunto de datos en dos partes exactamente iguales.

e) Tabla de distribución de frecuencias
En los casos donde resulta difícil o poco práctico obtener y procesar los datos completos para un problema estadístico, es posible aplicar las medidas de tendencia central en una tabla de distribución de frecuencias, aunque estas medidas no serán tan precisas como las calculadas con los datos originales. Las tablas suelen tener diversos elementos.

En la tabla aparecen, generalmente, los valores observados, o las clases, en forma creciente, respecto a su magnitud, los límites inferiores y superiores de cada clase, la marca de clase, la frecuencia absoluta, la frecuencia acumulada, el porcentaje, el porcentaje acumulado y el MiFi. Insistimos en que las tablas pueden tener variaciones.

Entendemos por ***clase*** al intervalo en el que se agrupan los valores.
Entendemos por ***límite inferior*** al valor menor del intervalo.
Entendemos por ***límite superior*** al valor mayor del intervalo.
Entendemos por ***marca de clase*** al valor central del intervalo.
Entendemos por ***frecuencia absoluta***, al número de veces que aparece un determinado valor en todas las observaciones.
Entendemos por ***frecuencia acumulada***, para cierto valor h, a la suma de las frecuencias de los valores observados menores o iguales a h.
Entendemos por ***frecuencia porcentual o porcentaje*** al resultado de multiplicar la frecuencia absoluta por cien y dividir dicho resultado entre el total de datos.
Entendemos por ***frecuencia porcentual acumulada***, para cierto valor h, a la suma de los porcentajes de los valores observados menores o iguales a h.
Entendemos por **MiFi** al producto de la marca de clase por la frecuencia absoluta.
Esta forma de presentar los datos acompañados de sus frecuencias constituye un primer modo de agrupar los resultados de una encuesta. A partir de la tabla, pueden hacerse diversas representaciones gráficas y calcular los parámetros estadísticos que caracterizan a la población estudiada.

Ejemplo: La siguiente tabla de frecuencias representa las estaturas que se registraron en cierta escuela secundaria. En este caso en ancho de clase es $1.31 - 1.10 = 0.21$

Clase	Límite inferior	Límite superior	Fre. absoluta	Fre. acumulada	Marca de clase	Porcentaje	Porcentaje acumulado	MiFi
1	1.10	1.31	340	340	1.205	15.46 %	15.46 %	409.700
2	1.32	1.53	368	708	1.425	16.72 %	32.18 %	524.400
3	1.54	1.75	567	1275	1.645	25.78 %	57.96 %	932.715
4	1.76	1.97	675	1950	1.865	30.68 %	88.64 %	1258.875
5	1.98	2.19	250	2200	2.085	11.36 %	100 %	521.250

Suma de MiFi = 3646.94

Para calcular la media, la mediana y la moda en un conjunto de datos agrupados en una tabla de frecuencias, tenemos los siguientes procesos.

Cálculo de la moda

La media de un conjunto de datos agrupados se determina mediante:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} M_i f_i}{N} = \frac{Sumatoria\ del\ producto[(marca\ clase)(Frecuencia\ absoluta)]}{Numero\ total\ de\ datos\ acumulados}$$

Tomando los datos de la tabla anterior tenemos:

$$\mu = \frac{36.46.94}{2200} = 1.6577$$

Cálculo de la mediana

Para determina el valor numérico de la mediana de un conjunto de datos agrupados, primeramente, es necesario determinar su ubicación mediante:

$$Ubicación\ de\ la\ mediana = \frac{N}{2} = \frac{Número\ total\ de\ datos}{2}$$

Sustituyendo los datos de la tabla se tiene:

$$Ubicación\ de\ la\ mediana = \frac{2200}{2} = 1100$$

La clase en done se tienen 1100 datos acumulados es en la clase 3, en donde el máximo dato acumulado es 1275, con esta información podemos determinar el valor de la mediana mediante:

$$Mediana = Li + \left[\frac{\frac{N}{2} - f_{acum\ anterior}}{f_a}\right] c$$

Sustituyendo los datos se tiene:

$$Mediana = 1.54 + \left[\frac{\frac{2200}{2} - 708}{567}\right] (0.21)$$

$$Mediana = 1.54 + \left[\frac{392}{567}\right] (0.21) = 1.54 + 0.1452 = 1.6852$$

Calculo de la moda

Para determinar la moda de un conjunto de datos agrupados, primeramente, es necesario identificar la clase que contempla la frecuencia absoluta de mayor valor. En nuestro caso se puede observar que la clase en donde se tiene la mayor frecuencia absoluta es la clase 4. Posteriormente la moda se puede determinar mediante:

$$Moda = Li + \left[\frac{D_1}{D_1 + D_2}\right] c$$

Para nuestra tabla tenemos:

$D_1 = 675 - 567 = 108$

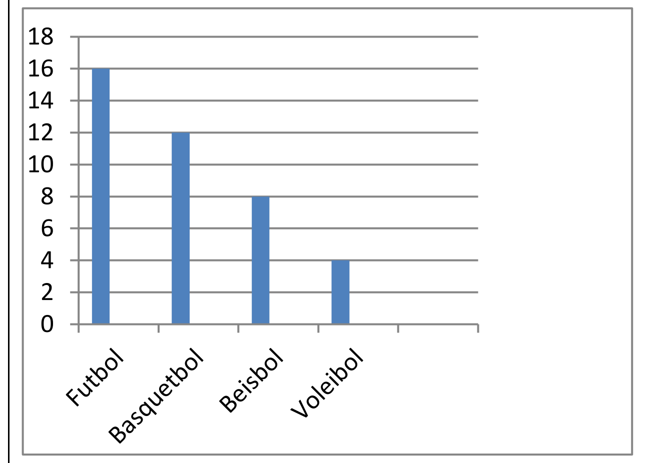
$D_2 = 675 - 250 = 425$

Sustituyendo los datos se tiene:

$$Moda = 1.76 + \left[\frac{108}{108 + 425}\right] (0.21)$$

$$Moda = 1.76 + \left[\frac{108}{533}\right] (0.21) = 1.76 + 0.0425 = 1.8025$$

EJERCICIOS

1. Una tienda de ropa ofrece descuentos del 25% en pantalones y el 10% en camisas sobre el precio marcado de $350 en pantalones y $140 en camisas. Si Felipe se compra 2 pantalones y dos camisas. ¿Cuánto deberá pagar con el descuento incluido? A) 490 B) 777 C) 791 D) 805	
2. La gráfica de la derecha representa el deporte favorito de los alumnos de un curso. ¿Cuál (es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera (s)? I) Al 30° de los alumnos lo que más les gusta es el futbol II) A la mitad de los alumnos lo que más les gusta es basquetbol o beisbol III) Al 30° de los alumnos lo que más les gusta es el volibol o beisbol A) Solo II B) Solo III C) Solo I y II D) Solo II y III	

3. Consideremos los siguientes sucesos:

I.- Goles anotados por un jugador en un partido

II.- Estatura, con centímetros, de una persona

III.- Número de teléfonos celulares construidos en una fábrica

(a) Variable continúa

(b) Variable discreta

¿En qué inciso se relaciona correctamente los enunciados anteriores con su respectivo tipo de variable?

A) I a, II a, III a

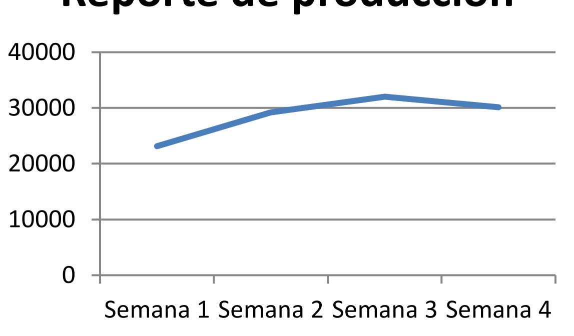
B) I a, II b, III a

C) I b, II b, III b

D) I b, II a, III b

4. En la figura derecha se presenta el reporte de producción de zapatos de las últimas 4 semanas de cierta fábrica. ¿Cuál es la tabla de datos qué se empleó para generar la figura?





A)

Semana	Producción
1	30000
2	19000
3	21215
4	24000

B)

Semana	Producción
1	25000
2	29000
3	32000
4	19000

C)

Semana	Producción
1	23140
2	29210
3	32020
4	30150

5. La siguiente figura representa las preferencias del horario para estudiar, día, tarde y noche, de 175 personas. Con base en la figura, ¿cuántas personas prefieren estudiar en el día?  Tarde 167.4° Noche 37.5% Día ¿? A) 28 B) 30 C) 66 D) 81	
6. A un conjunto de 3 números cuya media es 3.1 se le añade 2.2 y 3.5 ¿Cuál es la media del nuevo conjunto de números? A) 4. 12 B) 3.50 C) 3. 11 D) 3.00	

7. La siguiente tabla de frecuencias concentra el promedio final de un grupo de estudiantes.
¿Cuál es la media de los promedios?

Clase	Lím inf	Lím sup	Frec. abs	Frec. acu	Marca clase	MiFi
1	6	6.9	14	14	6.5	91
2	7	7.9	54	68	7.5	405
3	8	8.9	60	128	8.5	510
4	9	9.9	12	140	9.5	114

A) 7.8

B) 7.9

C) 8. 0

D) 8.1

8. Dos alumnos A y B de un curso de matemáticas obtuvieron las siguientes calificaciones durante el curso anual:

A: 9, 2, 3, 0, 4, 8, 2, 8

B: 6, 5, 6, 4, 4, 5, 4, 2

Indica, respectivamente, sus medias aritméticas.

A) 4.3 y 4.5

B) 4.5 y 4.5

C) 4.5 y 4.3

D) 4.4 y 4.4

9. Dos alumnos A y B de un curso de matemáticas obtuvieron las siguientes calificaciones durante el curso anual:

A: 9, 2, 3, 0, 4, 8, 2, 8

B: 6, 5, 6, 4, 4, 5, 4, 2

Indica, respectivamente, sus medianas.

A) 3.5 y 4.0

B) 4.5 y 4.5

C) 4.5 y 3.5

D) 3.5 y 4.5

10. La siguiente tabla muestra el peso, en kilogramos, de los toros que han sido pesados en el rancho La Cornada. ¿Cuál es el peso promedio de esos toros?

Toro	Peso (kg)
1	560
2	720
3	417
4	473
5	618
6	514
7	512
8	490

A) 538

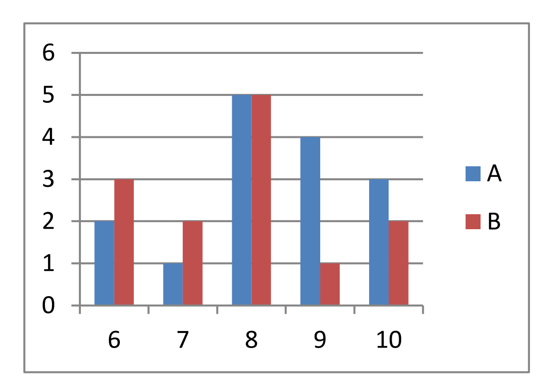
B) 530

C) 540

D) 542

11. ¿Cuál es la moda de la siguiente serie de números? 8, 3, 6, 5, 4, 5, 6, 8, 6, 4, 4, 8, 3, 4, 5, 4, 8, 3, 5, 4 A) 3 B) 4 C) 6 D) 7	
12. ¿Cuál es la mediana de la siguiente serie de números? $3, \frac{7}{2}, \sqrt[3]{729}, \frac{\pi}{2}, \frac{8^4}{4^4}, \frac{a}{a}$ A) 3 B) 3.15 C) 3.25 D) 3.50	

13. La siguiente gráfica muestra las calificaciones de los grupos A y B. Si se considera el total de alumnos. ¿Cuál es el valor de la mediana?



A) 6

B) 7

C) 8

D) 9

14. La siguiente tabla de frecuencias concentra el promedio final de los estudiantes de la generación 2016-2019. ¿Cuál es la mediana de los promedios?

Clase	Lím inf	Lím sup	Frec. abs	Frec. acu	Marca clase	MiFi
1	6	6.9	12	12	6.5	78
2	7	7.9	45	57	7.5	337.5
3	8	8.9	67	124	8.5	569.5
4	9	9.9	20	144	9.5	190

A) 8.0

B) 8.2

C) 8.4

D) 8.6

CUADRO RÉCORD

En el siguiente cuadro encontrarás las respuestas de cada ejercicio que acabas de realizar. Coteja con las respuestas que obtuviste y coloca ✓ si obtuviste la respuesta correcta o ✗ si no fue así. Encontrarás estos cuadros en cada sesión para que reconozcas los temas que ya tienes claros y los que hace falta que refuerces.

SESIÓN 6			
TEMA	**EJERCICIO**	**RESPUESTA**	**✓ ó ✗**
PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA	1	B	
	2	D	
	3	D	
	4	C	
	5	A	
	6	D	
	7	C	
	8	B	
	9	D	
	10	A	
	11	B	
	12	C	
	13	C	
	14	B	

METACOGNICIÓN

Después de verificar y analizar tus repuestas, detecta cuáles son tus fortalezas respecto al tema y cuáles son las debilidades que tienes que reforzar para mejorar tus resultados.

¿Qué debo mejorar en el área de Probabilidad?	
¿Cuál es el proceso a realizar para mejorar mi desempeño en el área de Estadística?	

DESPEDIDA

"Creo firmemente que casi todo es cuestión de actitud.
No se trata de lo que ocurre, sino de cómo lo afrontas."

¡FELICIDADES, ASPIRANTE!

HAS CONCLUIDO LA GUÍA DE

CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS

Estamos seguros de que ahora cuentas con los conocimientos necesarios para poder contestar de manera exitosa tu examen de admisión BUAP.

Sin embargo, te comentamos que, por haber adquirido y finalizado tu guía de estudio, cuentas con un cupón del 50% de descuento para la plataforma “simuladorpad.com”, registrándote únicamente con el correo que proporcionaste a través nuestra página de Facebook Guías BUAP 2021.

CUPÓN: **PAD21**



¡ÉXITO, ASPIRANTE!